DEPARTAMENTUL
MATEMATICĂ-INFORMATICĂ
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

MATINF

PUBLICAȚIE BIANUALĂ
DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ
PENTRU ELEVI ȘI PROFESORI

Anul III, nr. 5 / 2020

ISSN 2601-9426
ISSN-L 2601-8829

Editura
Universității din Pitești

Editată de: DEPARTAMENTUL MATEMATICĂ-INFORMATICĂ,
UNIVERSITATEA DIN PITEȘTI

Comitetul de redacție:

Stelian Corneliu ANDRONESCU	Eduard ASADURIAN
Tudor BĂLĂNESCU	Costel BĂLCĂU - redactor șef
Loredana BĂLILESCU	Doru CONSTANTIN
Şerban COSTEA	Laurențiu DEACONU
Maria-Crina DIACONU	Ionuț DINCĂ
Mihaela DUMITRACHE	Mihai Armand IONESCU
Florentin IPATE	Constantin GEORGESCU
Raluca Mihaela GEORGESCU	Camelia GHELDIU
Marius MACARIE	Maria MIROIU
Gheorghe NISTOR	Antonio Mihail NUICĂ
Viorel PĂUN	Doru Anastasiu POPESCU
Marin POPESCU	Nicolae-Doru STĂNESCU
Alina Florentina ȘTEFAN	Cristina TUDOSE
Adrian ŢURCANU	Corneliu UDREA

Tehnoredactare computerizată: Mihail TĂNASE, e-mail: mihaimit@yahoo.it

Redacția: Departamentul Matematică-Informatică, Universitatea din Pitești, Str. Târgu din Vale, nr. 1, Pitești, tel. 0348453247, e-mail: revista.matinf@upit.ro

Forma digitală a revistei poate fi accesată la adresa: http://matinf.upit.ro

Publicată de: Editura Universității din Pitești, https://www.upit.ro/ro/relatii-cu-mediul-socio-economic/centre-suport/editura

Anul III, Nr. 5, Iulie 2020

Cuprins

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ 5

L. Giugiuc, A.D. Pîrvuceanu

A generalisation of a problem from Gazeta Matematică 5

D. Mărghidanu

O inegalitate pentru funcţii convexe/concave 7

D. Văcaru

O metodă pentru a demonstra unele inegalități 12

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ 15

C. Bălcău

Complexitatea algoritmului de sortare prin interclasare (mergesort) 15

M. Cristea

Protocoale 25

M.R. Găman, M. Miroiu

Concursul ,,Dräexlmaier IT Day", Ediția a II-a, ianuarie 2020 34

RUBRICA DE ROBOTICĂ 41

D.A. Popescu

Repetarea operațiilor unui robot Mindstorms Education EV3 41

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE 44

Teste pentru examenul de Evaluare Națională 44

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 54

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 59

Teste pentru admiterea la facultate 64

Teste grilă pentru admiterea la facultate 67

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE 74

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii 74

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică 79

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI 85

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 3 85

Probleme propuse pentru liceu 95

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI 99

Probleme propuse 99

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII 109

S.C. Andronescu

Carl Friedrich Gauss, „...teoria numerelor este regina matematicii” 109

ARTICOLE ȘI NOTE DE MATEMATICĂ

A generalisation of a problem from Gazeta Matematică

Leonard Giugiuc[1] *and Alexandru Daniel Pîrvuceanu*[2]

The following is the problem 27767 from Gazeta Matematică, No. 11/2019:

27767. Let $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ be a differentiable function with the property that

$$\int_0^1 f(x)dx = 0.$$

Prove that there exists $c \in (0, 1)$ such that $f'(c) = -9\int_0^{\frac{1}{3}} f(t)dt$.

Marian Andronache and *Dinu Șerbănescu*, Bucharest

While we were solving this problem, we observed that a more general result holds. What is interesting is that the official solution published in [2] can be adapted to prove this more general result. In this article, we aim to present this generalisation, followed by our solution:

Problem. Let $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Consider a differentiable function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ such that

$$\int_a^b f(x)dx = 0.$$

Prove that for all $x \in [a, b]$ there exists $c_x \in (a, b)$ such that

$$2\int_a^x f(t)dt = (x - a)(x - b)f'(c_x).$$

Solution. If $x = a$ or $x = b$, then there is nothing to prove, since the conclusion rewrites as $0 = 0$.

For $x \in (a, b)$, the conclusion is equivalent to proving that there exists $c_x \in (a, b)$ such that

$$\frac{2\displaystyle\int_a^x f(t)dt}{(x - a)(x - b)} = f'(c_x).$$

Consider the function $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(y) = \displaystyle\int_a^y f(t)dt$.

[1]Professor, National ,,Traian" College, Drobeta-Turnu Severin, Romania, leonardgiugiuc@yahoo.com

[2]Student, Faculty of Mathematics and Computer Science, University of Bucharest, Bucharest, Romania, pirvuceanualexandrudaniel@gmail.com.

For an arbitrary $x \in (a,b)$, let $k_x := \dfrac{2\displaystyle\int_a^x f(t)dt}{(x-a)(x-b)}$.

From Cauchy's Mean Value Theorem on the intervals $[a,x]$ and $[x,b]$ we get that $\exists u_x \in (a,x)$ and $v_x \in (x,b)$ such that :

$$F(x)(2u_x - a - b) = (x-a)(x-b)f(u_x) \iff f(u_x) = \frac{1}{2}(2u_x - a - b)k_x$$

$$F(x)(2v_x - a - b) = (x-a)(x-b)f(v_x) \iff f(v_x) = \frac{1}{2}(2v_x - a - b)k_x$$

From Lagrange's Mean Value Theorem on $[u_x, v_x]$ we get that $\exists c_x \in (u_x, v_x) \subset (a,b)$ such that

$$\frac{f(v_x) - f(u_x)}{v_x - u_x} = f'(c_x) \iff f'(c_x) = \frac{k_x\left(\frac{2v_x-a-b}{2} - \frac{2u_x-a-b}{2}\right)}{v_x - u_x} = k_x,$$

which is the desired conclusion.

References

[1] Gazeta Matematică, No. 11/2019.

[2] Gazeta Matematică, No. 5/2020.

O inegalitate pentru funcţii convexe/concave

Dorin Mărghidanu[1]

Pornind de la inegalitatea ponderată a lui Jensen se obține o inegalitate foarte interesantă. Prin particularizarea acestei inegalități la diferite funcții convexe, se obțin numeroase aplicații.

Inegalitatea lui Jensen este foarte cunoscută și utilizată. În lumea inegalităților ea este chiar considerată drept ,,regina inegalităților", deoarece este o inegalitate foarte puternică. Multe din inegalitățile celebre – de exemplu: inegalitatea mediilor, inegalitatea CBS, inegalitatea Young, inegalitatea Hölder, inegalitatea Bergström, inegalitatea Radon, inegalitatea Huygens, etc. sunt cazuri particulare sau se pot demonstra cu ajutorul inegalității lui Jensen sau sunt echivalente cu *inegalitatea lui Jensen* (v. [1] - [3], [8], [9]). Ea are o enunțare foarte simplă:

Teorema 1. *(Inegalitatea ponderată a lui Jensen [1]) Dacă $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcție convexă, I-interval, atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) \geq f\left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k\right) \tag{\textbf{J}}$$

unde $w_k > 0$, $x_k \in I$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k x_k \in I$, $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k = 1$.

Dacă f este o funcție concavă pe I, semnul de inegalitate din (**J**) se inversează.

Egalitatea în (**J**) are loc dacă și numai dacă $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, sau când funcția f este funcție liniară (afină).

Pornind de la această inegalitate celebră, vom obține o nouă inegalitate pentru funcții convexe, respectiv funcții concave.

Teorema 2. *(Inegalitate de convexitate/concavitate) Dacă $f : I \subseteq (0, \infty) \to \mathbb{R}$ este o funcție convexă pe intervalul I, astfel încât $a_k > 0$, $\dfrac{S - a_k}{a_k} \in I$, $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $n - 1 \in I$, iar $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = S$ atunci are loc inegalitatea*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f\left(\frac{S - a_k}{a_k}\right) \geq f(n-1) \cdot S\,. \tag{C}$$

Dacă f este o funcție concavă pe I, semnul de inegalitate din (C) *se inversează.*

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, sau când funcția f este funcție liniară.

[1]Profesor dr., Colegiul Național ,,Al. I. Cuza", Corabia, d.marghidanu@gmail.com

Demonstraţie. În (**J**) luăm $x_k = \dfrac{S-a_k}{a_k}$ și ponderile $w_k = \dfrac{a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}$, pentru care avem evident: $w_k > 0$, $\forall k \in \{1,2,\ldots,n\}$, $\sum\limits_{k=1}^{n} w_k = 1$. Cu aceste substituții avem:

$$\sum_{k=1}^{n} w_k f(x_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \cdot f\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right) = \frac{1}{S}\sum_{k=1}^{n} a_k f\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right), \tag{1}$$

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} w_k x_k\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j} \cdot \frac{S-a_k}{a_k}\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{S-a_k}{S}\right) = f\left(\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{a_k}{S}\right)\right) = f(n-1). \tag{2}$$

Cu (1), (2) în inegalitatea lui Jensen, inegalitatea (C) rezultă imediat.

Egalitatea are loc dacă $\dfrac{S-a_1}{a_1} = \dfrac{S-a_2}{a_2} = \ldots = \dfrac{S-a_n}{a_n} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. □

Aplicații

Alegând în mod potrivit diferite funcții convexe / concave în inegalitatea (C), se pot obține numeroase inegalități. În cele ce urmează vom exemplifica – mai degrabă în scop paradigmatic – prin câteva inegalități specifice. Evident, pentru rezultatele prezentate pot exista și alte tipuri de demonstrare. Este ceea ce am observat prin propunerea unora dintre ele în diferite grupuri de matematică, on-line, v. [4]-[7], și unde au fost oferite felurite soluționări.

Propoziția 1. *Dacă* $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$, $p \geq 1$ *sau* $p < 0$ *și* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, *atunci*

$$\frac{(S-a_1)^p}{a_1^{p-1}} + \frac{(S-a_2)^p}{a_2^{p-1}} + \ldots + \frac{(S-a_n)^p}{a_n^{p-1}} \geq (n-1)^p S. \tag{3}$$

Dacă $0 < p < 1$, *inegalitatea din* (3) *este inversată.*

Demonstraţie. Se consideră funcția $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$ care pentru $p \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ este funcție convexă.

Aplicând inegalitatea (C) se obține inegalitatea (3).

Pentru $0 < p < 1$, funcția f este concavă, deci inegalitatea (3) este inversată. □

Observația 1. Inegalitatea (3) se poate demonstra și cu *inegalitatea lui Radon.*

Corolarul 1. *Pentru* $a, b, c > 0$, $p \geq 1$, *avem:*

$$\frac{(a+b)^p}{c^{p-1}} + \frac{(b+c)^p}{a^{p-1}} + \frac{(c+a)^p}{b^{p-1}} \geq 2^p \cdot (a+b+c). \tag{4}$$

Corolarul 2. *([4]) Pentru $a, b, c \geq 0$, avem:*

$$\sqrt[4]{a \cdot (b+c)^3} + \sqrt[4]{b \cdot (c+a)^3} + \sqrt[4]{c \cdot (a+b)^3} \leq \sqrt[4]{8} \cdot (a+b+c)\,. \tag{5}$$

Demonstraţie. Se aplică inegalitatea (C) pentru funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{\frac{3}{4}}$ care este funcție strict concavă. Egalitatea are loc dacă

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} \Leftrightarrow a = b = c.$$

□

Corolarul 3. *([5]) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ și $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, atunci*

$$a_1 \cdot \sqrt{\frac{a_1}{S - a_1}} + a_2 \cdot \sqrt{\frac{a_2}{S - a_2}} + \ldots + a_n \cdot \sqrt{\frac{a_n}{S - a_n}} \geq \frac{S}{\sqrt{n-1}} \tag{6}$$

Demonstraţie. Considerăm funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$, care este funcție strict convexă pe $0, \infty)$, pentru care se aplică inegalitatea (C). □

Propoziția 2. *([6]) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ și $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, atunci*

$$\frac{(S-a_1)(S-2a_1)}{a_1^2} + \frac{(S-a_2)(S-2a_2)}{a_2^2} + \ldots + \frac{(S-a_n)(S-2a_n)}{a_n^2} \geq n(n-1)(n-2). \tag{7}$$

Demonstraţie. Fie funcția $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - x$, pentru care avem $f''(x) = 6x \geq 0$, deci funcția f este convexă pe intervalul $[0, \infty)$.

Atunci, aplicând inegalitatea (C), avem succesiv:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k f\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right) &\geq f(n-1) \cdot S \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{S-a_k}{a_k}\left[\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)^2 - 1\right] &\geq (n-1)\left[(n-1)^2 - 1\right] \cdot S \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} (S-a_k)\frac{S^2 - 2Sa_k}{a_k^2} &\geq (n-1)[(n-1)^2 - 1] \cdot S \\
\Leftrightarrow S\sum_{k=1}^{n} (S-a_k)\frac{S-2a_k}{a_k^2} &\geq n(n-1)(n-2) \cdot S \\
\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \frac{(S-a_k)(S-2a_k)}{a_k^2} &\geq n(n-1)(n-2).
\end{aligned}$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. □

Propoziția 3. *Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ și $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$, atunci*

$$\sqrt{(S-a_1)^2 + a_1^2} + \sqrt{(S-a_2)^2 + a_2^2} + \ldots + \sqrt{(S-a_n)^2 + a_n^2} \geq \sqrt{n^2 - 2n + 2} \cdot S. \tag{8}$$

Demonstraţie. Considerăm funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+1}$, pentru care avem $f''(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}>0$, deci funcția f este strict convexă.

Cum $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kf\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\sqrt{\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)^2+1}=\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(S-a_k)^2+a_k^2}$, și $f(n-1)\cdot S=\sqrt{n^2-2n+2}\cdot S$, cu inegalitatea (C) rezultă și inegalitatea (8).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n$. □

Observația 2. Inegalitatea (8) se poate demonstra și cu *inegalitatea lui Minkowski.*

Propoziția 4. *Dacă* $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ *și* $a_1+a_2+\ldots+a_n=S$, *atunci*

$$\frac{a_1^3}{S-a_1}+\frac{a_2^3}{S-a_2}+\ldots+\frac{a_n^3}{S-a_n}\geq\frac{1}{(n-1)n}\cdot S^2. \tag{9}$$

Demonstraţie. Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ este o funcție convexă.

Cum $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kf\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{1}{\frac{S-a_k}{a_k}\left(\frac{S-a_k}{a_k}+1\right)}=\frac{1}{S}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{a_k^3}{S-a_k}$, iar $f(n-1)\cdot S=\frac{1}{(n-1)n}\cdot S$, cu inegalitatea (C) rezultă inegalitatea (9).

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n$. □

Propoziția 5. *Dacă* $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$, $b>0$, $b\neq1$ *și* $a_1+a_2+\ldots+a_n=S$, *atunci*

$$a_1\cdot b^{\frac{S}{a_1}}+a_2\cdot b^{\frac{S}{a_2}}+\ldots+a_n\cdot b^{\frac{S}{a_n}}\geq b^n\cdot S \tag{10}$$

Demonstraţie. Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=b^x$, este funcție convexă.

Cum $\sum\limits_{k=1}^{n}a_kf\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot b^{\frac{S-a_k}{a_k}}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{b^{\frac{S}{a_k}}}{b}=\frac{1}{b}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cdot b^{\frac{S}{a_k}}$, iar $f(n-1)\cdot S=b^{n-1}\cdot S$, cu inegalitatea (C) rezultă inegalitatea din enunț.

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n$. □

Propoziția 6. *Dacă* $a_1,a_2,\ldots,a_n>0$ *și* $a_1+a_2+\ldots+a_n=S$, *atunci*

$$\left(\frac{S}{a_1}-1\right)^{a_1}\cdot\left(\frac{S}{a_2}-1\right)^{a_2}\cdot\ldots\cdot\left(\frac{S}{a_n}-1\right)^{a_n}\leq(n-1)^S. \tag{11}$$

Demonstraţie. Funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x$ este funcție concavă. Aplicând inegalitatea (C) - pentru funcții concave, avem succesiv:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kf\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)\leq f(n-1)\cdot S\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}a_k\ln\frac{S-a_k}{a_k}\leq S\cdot\ln(n-1)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{S}{a_k}-1\right)^{a_k}\leq\ln(n-1)^S\Leftrightarrow\ln\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{S}{a_k}-1\right)^{a_k}\leq\ln(n-1)^S$$

$$\Leftrightarrow\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{S}{a_k}-1\right)^{a_k}\leq(n-1)^S.$$

Egalitatea are loc dacă și numai dacă $a_1=a_2=\ldots=a_n$. □

Propoziţia 7. *([7]) Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ cu notaţiile $a_1+a_2+\ldots+a_n = S$ şi $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = P$, avem:*

$$a_1^{a_1} \cdot a_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{a_n} \cdot (S-a_1)^{S-a_1} \cdot (S-a_2)^{S-a_2} \cdot \ldots \cdot (S-a_n)^{S-a_n} \geq \left((n-1)^{n-1} \cdot P\right)^S. \qquad (12)$$

Demonstraţie. Considerăm funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$, care este funcţie strict convexă. Calculăm şi aici:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k f\left(\frac{S-a_k}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{S-a_k}{a_k} \ln \frac{S-a_k}{a_k} = \sum_{k=1}^{n} (S-a_k) \ln \frac{S-a_k}{a_k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln \left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)^{S-a_k} = \ln \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{S-a_k}{a_k}\right)^{S-a_k}$$

$$= \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{(S-a_k)^{S-a_k}}{a_k^{S-a_k}} = \ln \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n} a_k^S} \cdot \prod_{k=1}^{n} a_k^{a_k} (S-a_k)^{S-a_k} = \ln \frac{1}{P^S} \prod_{k=1}^{n} a_k^{a_k} (S-a_k)^{S-a_k},$$

respectiv $f\,(n-1) \cdot S = [(n-1) \ln (n-1)] \cdot S = \ln (n-1)^{(n-1)S}$.

Aplicând inegalitatea (C) se obţine inegalitatea (12).

Egalitatea are loc dacă şi numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. □

Bibliografie

[1] J.L.W.V. Jensen, *Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes*, Acta Mathematica, 30 (1), pp. 175–193, 1906.

[2] D. Mărghidanu, *Generalizations and refinements for Bergström and Radon's Inequalities*, Journal of Sciences and Arts, Year 8, No. 1 (8), 2008, on-line, `http://www.icstm.ro/DOCS/josa/josa_2008_1/cuprins.htm`

[3] D. Mărghidanu, *Generalizări ale inegalităţilor lui Young, Hölder, Rogers şi Minkowski*, Gazeta Matematică, seria A, Anul XXVI (CV), nr. 3 / 2008.

[4] D. Mărghidanu, *Proposed problem*, Mathematical Inequalities, `https://www.facebook.com/photo.php?fbid=337802362228848&set=gm.2648165092138202&type=3&theater&ifg=1`

[5] D. Mărghidanu, *Proposed problem*, Romanian Mathematical Magazine, `https://www.facebook.com/photo.php?fbid=2585007641829030&set=gm.1838155749642029&type=3&theater`

[6] D. Mărghidanu, *Proposed problem*, Math Facts, `https://www.facebook.com/photo.php?fbid=3390923744300043&set=gm.739274503502386&type=3&theater&ifg=1`

[7] D. Mărghidanu, *Proposed problem*, Groupe Matheux, `https://www.facebook.com/photo.php?fbid=3400655483326869&set=gm.1593674704140714&type=3&theater&ifg=1`

[8] D.S. Mitrinović, J.E. Pecarić, A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Acad. Press., 1993.

[9] P.M. Vasic, J.E. Pecaric, *On the Jensen Inequality*, Univ. Beograd. Publ. Electrotehn. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. 634 – 677, pp. 50-54, 1979.

O metodă pentru a demonstra unele inegalități

Daniel Văcaru [1]

În acest articol vom prezenta trei exemple de demonstrație a unor inegalități în mai multe variabile folosind următoarea metodă: considerăm o funcție într-o variabilă, fixând celelalte variabile, și utilizăm proprietățile acesteia.

Mai întâi, vom rezolva o problemă apărută pe site-ul specializat de matematică www.ssmrmh.ro:

Fie $x, y, z \in [-1,1]$. Arătați că

$$xy + yz + zx \geq -1$$

Nguyen Viet Hung

Să considerăm $f_{(y,z)}\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, $f_{(y,z)}(x) = (y+z)\cdot x + yz$, $y, z \in [-1,1]$.

Să analizăm cazurile posibile:

I)Dacă $y + z > 0$, atunci $f_{(y,z)}$ este (strict) crescătoare, și $f_{(y,z)}(x) \geq f_{(y,z)}(-1) = yz - y - z$. Pentru a arăta că $yz - y - z \geq -1$, este suficient să probăm că $yz - y - z + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (y-1)\cdot(z-1) \geq 0$, fapt implicat de inegalitățile $y, z \leq 1$.

II) Dacă $y + z < 0$, atunci $f_{(y,z)}$ este descrescătoare și $f_{(y,z)}(x) \geq f_{(y,z)}(1) = yz + y + z$. Pentru a arăta că $yz+y+z \geq -1$, ajunge să probăm că $yz+y+z+1 \geq 0 \Leftrightarrow (y+1)\cdot(z+1) \geq 0$, care urmează din inegalitățile $y, z \geq -1$.

III) Pentru cazul $y + z = 0$, avem $f_{(y,z)}(x) = yz, (\forall)\, x \in [-1,1]$. Dar

$$y, z \in [-1,1] \Leftrightarrow |y|, |z| \leq 1 \Rightarrow |yz| \leq 1 \Rightarrow yz \geq -1,$$

finalizând demonstrația noastră.

Să rezolvăm și o parte a unei probleme apărută pe site-ul de pregătire în matematică susținut de *Andrei Eckstein*, anume https://pregatirematematicaolimpiadejuniori.wordpress.com/, al cărei enunț este:

Arătați că, dacă $a, b, c \in [0,1]$, atunci $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ca} + \dfrac{c}{1+ab} + \dfrac{abc}{2} \leq 2.$

Cum avem $1 \geq a \Rightarrow bc \geq abc \Rightarrow 1 + bc \geq 1 + abc \Rightarrow \dfrac{a}{1+bc} \leq \dfrac{a}{1+abc}$. Sumând cele trei relații obținute și adunând cu $\dfrac{abc}{2}$, obținem $\dfrac{a}{1+bc} + \dfrac{b}{1+ca} + \dfrac{c}{1+ab} + \dfrac{abc}{2} \leq \dfrac{a+b+c}{1+abc} + \dfrac{abc}{2}$. Rămâne să probăm că $\dfrac{a+b+c}{1+abc} + \dfrac{abc}{2} \leq 2$.

[1]Profesor, Colegiul Economic ,,Maria Teiuleanu", Pitești, danvaccag@gmail.com

După calcule obișnuite, obținem că

$$\frac{a+b+c}{1+abc}+\frac{abc}{2}\leq 2\Leftrightarrow 2a+2b+2c+abc+a^2b^2c^2\leq 4+4abc\Leftrightarrow a^2b^2c^2-3abc+2a+2b+2c-4\leq 0.$$

Considerăm membrul stâng ca o funcție de gradul al II-lea în c, de forma

$$f_{(a,b)}:[0,1]\to\mathbb{R},f_{(a,b)}(c)=a^2b^2c^2-c\cdot(3ab-2)+2a+2b-4.$$

Calculând, obținem $f_{(a,b)}(0)=2a+2b-4\leq 0$ și $f_{(a,b)}(1)=a^2b^2-3ab+2a+2b-2$. Să considerăm

$$g_b:[0,1]\to\mathbb{R},g_b(t)=b^2t^2+(2-3b)t+2b-2.$$

Găsim $g_b(0)=2b-2\leq 0$ și $g_b(1)=b^2-b\leq 0$. Pentru $b>0$ deducem că $(0,1)$ este un interval pe care funcția de gradul al doilea g_b păstrează semnul minus, afirmație valabilă și pentru $b=0$, așadar

$$a^2b^2-3ab+2a+2b-2\leq 0,(\forall)\,a,b\in[0,1].$$

Am obținut că $f_{(a,b)}(1)\leq 0$, deci $a^2b^2c^2-3abc+2a+2b+2c-4\leq 0,(\forall)\,a,b,c\in[0,1]$, stabilind că, într-adevăr,

$$\frac{a}{1+bc}+\frac{b}{1+ca}+\frac{c}{1+ab}+\frac{abc}{2}\leq 2.$$

Ca o ultimă aplicație a metodei, avem și problema următoare.

AMS 11306. Propusă de *Alexandru Roșoiu*, Universitatea din București, România. *Fie a,b și c lungimile laturilor unui triunghi nedegenerat ABC, $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, r și R razele cercurilor înscris, respectiv circumscris triunghiului. Arătați că*

$$\frac{c}{2}\cdot\frac{4r-R}{R}\leq\sqrt{(p-a)\cdot(p-b)}\leq\frac{c}{2}.\qquad(*)$$

Să începem introducând unele notații. Fie $p-a\overset{not}{=}x$, $p-b\overset{not}{=}y$, $p-c\overset{not}{=}z$. Evident, $x,y,z>0$. Cu aceste notații, avem $\dfrac{r}{R}=\dfrac{\frac{S}{p}}{\frac{abc}{4S}}=\dfrac{4S^2}{pabc}=\dfrac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{pabc}=\dfrac{4xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}$.
Inegalitatea (*) este echivalentă cu:

$$\frac{x+y}{2}\cdot\left(16\cdot\frac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}-1\right)\leq\sqrt{xy}\overset{AM-GM}{\leq}\frac{x+y}{2}.$$

Vom proba inegalitatea $\dfrac{x+y}{2}\cdot\left(16\cdot\dfrac{xyz}{(x+y)(y+z)(z+x)}-1\right)\leq\sqrt{xy}$ considerând funcția $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$, $f(z)=8xy\cdot\dfrac{z}{(z+x)(z+y)}-\dfrac{x+y}{2}-\sqrt{xy}$. Avem

$$f'(z)=8xy\cdot\frac{1\cdot(x+z)\cdot(y+z)-z(2z+x+y)}{(x+z)^2\cdot(y+z)^2}$$

$$= 8xy \cdot \frac{xy + z^2 + z(x+y) - 2z^2 - z(x+y)}{[(x+z)(y+z)]^2}$$

$$= 8xy \cdot \frac{-z^2 + xy}{[(x+z)(y+z)]^2}, (\forall)\, z > 0, (\forall)\, x, y > 0.$$

Cu tabelul de monotonie, utilizând semnul funcției de gradul al doilea, deducem că f are un maxim în $\sqrt{xy}$. Calcularea lui $f\left(\sqrt{xy}\right)$ ne conduce către

$$f(\sqrt{xy}) = \frac{8xy\sqrt{xy}}{\left(x+\sqrt{xy}\right)\left(y+\sqrt{xy}\right)} - \frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{8xy}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2} - \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2}.$$

Observăm, însă, echivalența $\frac{8xy}{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2} - \frac{\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2}{2} \leq 0 \Leftrightarrow 16xy \leq \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^4$, care este inegalitatea mediilor. Rezultă că $f(z) \leq f\left(\sqrt{xy}\right) \leq 0$, ceea ce încheie demonstrația.

Dacă triunghiul este echilateral inegalitățile devin egalități, iar în cazul triunghiurilor isoscele cu $a = b$ doar inegalitatea din dreapta devine egalitate.

ARTICOLE ȘI NOTE DE INFORMATICĂ

Complexitatea algoritmului de sortare prin interclasare (mergesort)

Costel Bălcău [1]

Algoritmul de sortare prin interclasare (mergesort), inventat de către faimosul savant John von Neumann în anul 1945, este unul dintre cei mai performanți algoritmi de sortare.

În articolul de față vom analiza riguros complexitatea acestui algoritm, utilizând rezultate de bază din teoria algoritmilor privind ordinele de complexitate și arborii de sortare prezentate în [2], [3], precum și tehnici matematice de rezolvare a relațiilor de recurență.

Astfel vom putea studia eficiența și optimalitatea acestui algoritm în cadrul clasei algoritmilor de sortare bazați pe comparații de chei.

Descrierea algoritmului

Pentru a sorta crescător un vector dat $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \geq 1$, **algoritmul de sortare prin interclasare** (**mergesort**) utilizează următorul procedeu specific metodei de programare *Divide et Impera*:

- Dacă $n = 1$, atunci vectorul este deja sortat (având un singur element);
- Dacă $n \geq 2$, atunci:
  - Se împarte vectorul A în doi subvectori

$$(a_1, \ldots, a_m) \text{ și } (a_{m+1}, \ldots, a_n), \text{ unde } m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$$

    (deci a_m este elementul median și cei doi subvectori au dimensiuni cât mai apropiate posibil);
  - Se sortează crescător cei doi subvectori, prin același procedeu;
  - Se **interclasează** cei doi subvectori sortați, adică se reconstruiește vectorul A astfel încât să conțină toate componentele celor doi subvectori sortați (deci toate cele n componente ale vectorului inițial) și care să fie, de asemenea, sortat crescător.

Reamintim că $\lfloor x \rfloor$ reprezintă partea întreagă (inferioară) a numărului real x (adică aproximarea întreagă prin lipsă a lui x, notată de obicei cu $[x]$), iar $\lceil x \rceil$ reprezintă partea întreagă superioară a numărului real x (adică aproximarea întreagă prin adaos a lui x).

[1] Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, cbalcau@yahoo.com

Descrierea în pseudocod a algoritmului are următoarea formă.

SORTINT(A, p, u)**:** // sortarea secvenței $(a_p, \ldots, a_u)$
if $p < u$ **then**
  $m \leftarrow \left\lfloor \frac{p+u}{2} \right\rfloor$;
  SORTINT(A, p, m); // sortarea subsecvenței $(a_p, \ldots, a_m)$
  SORTINT$(A, m+1, u)$; // sortarea subsecvenței $(a_{m+1}, \ldots, a_u)$
  INTERCLAS(A, p, u, m); // interclasarea celor două subsecvențe sortate

unde procedura de interclasare este:

INTERCLAS(A, p, u, m) ; // interclasarea subsecvențelor
// $(a_p, \ldots, a_m)$ și $(a_{m+1}, \ldots, a_u)$, sortate crescător
$i \leftarrow p$; // poziția curentă din subsecvența $(a_p, \ldots, a_m)$
$j \leftarrow m+1$; // poziția curentă din subsecvența $(a_{m+1}, \ldots, a_u)$
$k \leftarrow 0$; // dimensiunea curentă a unui vector B, sortat crescător,
// ce va fi construit prin interclasarea celor două subsecvențe,
// comparând componentele curente a_i și a_j din cele două subsecvențe
// și copiind-o pe cea mai mică în B
while $i \leq m$ *and* $j \leq u$ **do**
  // mai există componente necopiate în ambele subsecvențe
  if $A[i] \leq A[j]$ **then**
    // mai mică este componenta curentă din prima subsecvență,
    $k \leftarrow k+1$; $B[k] \leftarrow A[i]$; // deci o copiem în B
    $i \leftarrow i+1$; // și avansăm în prima subsecvență
  else
    // mai mică este componenta curentă din a doua subsecvență,
    $k \leftarrow k+1$; $B[k] \leftarrow A[j]$; // deci o copiem în B
    $j \leftarrow j+1$; // și avansăm în a doua subsecvență

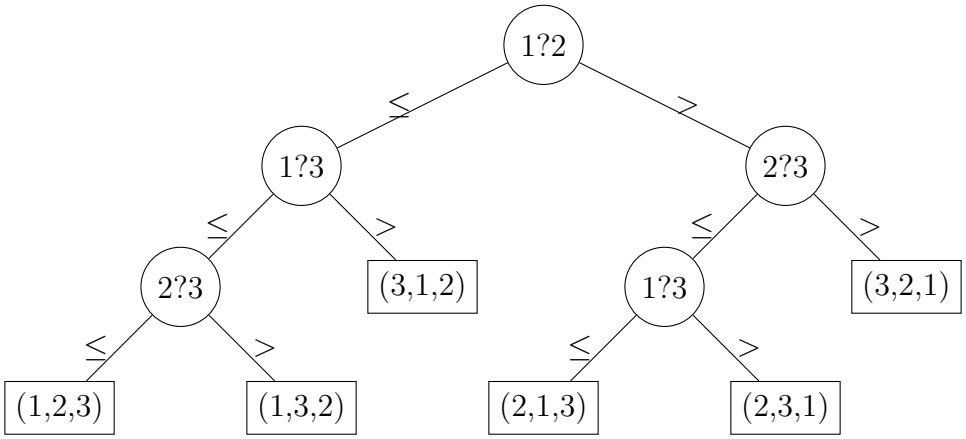
// una dintre subsecvențe nu mai are elemente necopiate;
// copiem în B și componentele rămase necopiate
// din cealaltă subsecvență
for $q = \overline{i,\, m}$ **do** // componente rămase necopiate în prima subsecvență
  $k \leftarrow k+1$; $B[k] \leftarrow A[q]$;
for $q = \overline{j,\, u}$ **do** // componente rămase necopiate în a doua subsecvență
  $k \leftarrow k+1$; $B[k] \leftarrow A[q]$;
// La final aducem componentele (sortate crescător) din $B = (b_1, \ldots, b_k)$
// înapoi în subsecvența $(a_p, \ldots, a_u)$:
for $i = \overline{1,\, k}$ **do**
  $A[p+i-1] \leftarrow B[i]$;

Apel:

SORTINT$(A, 1, n)$ // pentru sortarea întregului vector $A = (a_1, \ldots, a_n)$.

Exemplul 1. În figura următoare este reprezentat arborele extins de sortare asociat algoritmului de sortare prin interclasare pentru $n = 3$. Observăm că algoritmul nu conține comparații de

chei redundante.



Observația 1. Procedura de interclasare poate fi ușor îmbunătățită, eliminând copierile inutile în vectorul intermediar B și înapoi în vectorul A ale componentelor rămase necopiate (la ieșirea din ciclul **whil**e) în una dintre cele două subsecvențe interclasate. În acest sens, putem renunța la ciclul **for** $q = \overline{j,\ u}$, deoarece elementele rămase necopiate în a doua subsecvență sunt deja pe pozițiile bune, deci nu are rost să le mai copiem în B. De asemenea, elementele rămase necopiate în prima subsecvență pot fi copiate direct pe ultimele poziții ale secvenței $(a_p, \ldots, a_u)$ (în ordine inversă, pentru a evita pierderea valorilor unor componente prin suprapunere), fără a le mai copia în B; pentru aceasta, putem înlocui ciclul **for** $q = \overline{i,\ m}$ cu:

for $q = \overline{m,\ i,\ -1}$ **do**
  $A[u + q - m] \leftarrow A[q]$;

Observația 2. Implementarea aleasă pentru algoritmul de sortare prin interclasare este una recursivă, în care soluția problemei apelează soluțiile subproblemelor de dimensiuni mai mici, adică folosește **strategia Divide et Impera în varianta *top-down***. În cazul acestei variante este important că subproblemele sunt disjuncte și astfel calculul necesar rezolvării unei subprobleme nu este reluat prin apelarea repetată a acesteia (ceea ce ar conduce la un timp de calcul exponențial, așa cum se întâmplă la utilizarea acestei variante în rezolvarea unor probleme prin *metoda programării dinamice*). Menționăm că algoritmul poate fi descris și implementat și iterativ, utilizând **varianta *bottom-up* a strategiei Divide et Impera**, în care subproblemele se rezolvă în ordinea crescătoare a dimensiunii lor. Această variantă este mult mai eficientă în cazul *programării dinamice*, când subproblemele se suprapun, dar în cazul sortării prin interclasare are aceeași complexitate ca și varianta noastră, de tip *top-down*. Mai multe detalii privind implementarea și complexitatea acestor două forme, precum și a altor variante ale algoritmului de sortare prin interclasare, pot fi găsite în [9] și [8].

Complexitatea algoritmului

Teorema 1 (**complexitatea algoritmului de sortare prin interclasare**). *Algoritmul de sortare prin interclasare a unui vector cu n componente are complexitatea $\Theta(n \log_2 n)$.*

Demonstraţie. Fie $T(n)$ timpul de execuție al algoritmului **SORTINT**$(A, 1, n)$. Vom demonstra că $T(n) = \Theta(n \log_2 n)$ prin două metode.

Metoda 1) Vom estima efectiv timpul de execuție $T(n)$. Vom număra numai operațiile de **comparație de chei** (comparații în care intervin elemente ale vectorului) și de **deplasări** (atribuiri în care intervin elemente ale vectorului). Celelalte operații care se efectuează au același ordin de creștere cu cele pe care le analizăm. Avem

$$T(n) = c_1 \cdot N_c(n) + c_2 \cdot N_d(n), \tag{1}$$

unde $N_c(n)$ și $N_d(n)$ reprezintă numărul de *comparații de chei*, respectiv numărul de *deplasări* efectuate de algoritm, iar $c_1, c_2 > 0$ sunt constante ce reprezintă costurile în timp ale executării unei *comparații de chei* și, respectiv, ale unei *deplasări*.

Conform descrierii recursive a algoritmului, rezultă că numerele $N_c(n)$ și $N_d(n)$ verifică, respectiv, relațiile de recurență

$$N_c(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 1, \\ N_c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + N_c\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \overline{N}_c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), & \text{dacă } n > 1, \end{cases} \tag{2}$$

$$N_d(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 1, \\ N_d\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + N_d\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \overline{N}_d\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right), & \text{dacă } n > 1, \end{cases} \tag{3}$$

unde $\overline{N}_c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ și $\overline{N}_d\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ reprezintă numărul de *comparații de chei*, respectiv numărul de *deplasări* efectuate la interclasarea celor doi subvectori sortați, $(a_1, \ldots, a_m)$ și $(a_{m+1}, \ldots, a_n)$, cu $m = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, de dimensiuni $m = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, respectiv $n - m = n - \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Conform descrierii procedurii de interclasare, la interclasarea celor doi subvectorilor avem:

- Numărul de *deplasări* $\overline{N}_d\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ este egal cu dublul numărul de componente ale lui A (fiecare componentă - fie că se află în primul subvector, fie că se află în al doilea subvector - este mutată o dată în vectorul intermediar B și o dată adusă înapoi în A), deci
$$\overline{N}_d\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = 2\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = 2n. \tag{4}$$

- Numărul de *comparații de chei* $\overline{N}_c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$ este egal cu numărul de execuții ale ciclului **while**. Cu fiecare astfel de comparație are loc și o copiere în vectorul B a unei componente din A, adică o *deplasare*. La ieșirea din ciclul **while**, componentele unuia dintre cei doi subvectori ai lui A au fost toate copiate în B, iar în celălalt subvector au mai rămas r componente necopiate în B, care vor fi și ele copiate în B, dar după ieșirea din acest ciclu. Rezultă că
$$\overline{N}_c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) = n - r.$$
Evident,
$$1 \leq r \leq \max\left\{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right\} = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,$$
deci
$$\overline{N}_c\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \in \left\{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, \ldots, n-1\right\}. \tag{5}$$

Notând cu $N_c^+(n)$ numărul de *comparații de chei în cazul cel mai defavorabil*, din (2) și (5) rezultă relația de recurență

$$N_c^+(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 1, \\ N_c^+\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + N_c^+\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 1, & \text{dacă } n > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Rezolvăm această relație de recurență.

Pentru $n =$ număr par, adică $n = 2m$, $m \geq 1$, avem

$$\begin{aligned} N_c^+(n+1) - N_c^+(n) &= N_c^+(2m+1) - N_c^+(2m) \\ &= \left(N_c^+(m+1) + N_c^+(m) + 2m\right) - \left(N_c^+(m) + N_c^+(m) + 2m - 1\right) \\ &= N_c^+(m+1) - N_c^+(m) + 1, \end{aligned}$$

iar pentru $n =$ număr impar, adică $n = 2m - 1$, $m \geq 2$, avem

$$\begin{aligned} N_c^+(n+1) - N_c^+(n) &= N_c^+(2m) - N_c^+(2m-1) \\ &= \left(N_c^+(m) + N_c^+(m) + 2m - 1\right) - \left(N_c^+(m) + N_c^+(m-1) + 2m - 2\right) \\ &= N_c^+(m) - N_c^+(m-1) + 1, \end{aligned}$$

deci pentru orice $n > 1$ avem

$$N_c^+(n+1) - N_c^+(n) = N_c^+\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) - N_c^+\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1.$$

Notând

$$f(n) = N_c^+(n+1) - N_c^+(n),\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{7}$$

obținem că

$$f(n) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n = 1, \\ f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1, & \text{dacă } n > 1. \end{cases} \tag{8}$$

Demonstrăm că

$$f(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil,\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{9}$$

prin inducție.

Pentru $n = 1$ avem $f(1) = 1 = \lceil \log_2 2 \rceil$.

Presupunem egalitatea adevărată pentru orice număr din mulțimea $\{1, \ldots, n-1\}$ și o demonstrăm pentru n ($n \geq 2$). Într-adevăr, folosind relația de recurență (8) și ipoteza de inducție pentru $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ avem

$$f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + 1 = \left\lceil \log_2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)\right\rceil + 1.$$

Dar, notând $\lceil \log_2(n+1) \rceil = k$, avem $k \in \mathbb{N}^*$, $k \geq 2$ și, succesiv:

$$\begin{gathered} k - 1 < \log_2(n+1) \leq k;\ 2^{k-1} < n + 1 \leq 2^k; \\ 2^{k-1} \leq n < 2^k;\ 2^{k-2} \leq \frac{n}{2} < 2^{k-1}; \\ 2^{k-2} \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor < 2^{k-1};\ 2^{k-2} < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq 2^{k-1}; \\ k - 2 < \log_2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \leq k - 1; \\ \left\lceil \log_2\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right)\right\rceil = k - 1, \end{gathered}$$

deci

$$f(n) = k - 1 + 1 = k = \lceil \log_2(n+1) \rceil,$$

ceea ce încheie demonstrația prin inducție a relației (9).

Din (7) și (9) rezultă că

$$N_c^+(n+1) - N_c^+(n) = \lceil \log_2(n+1) \rceil,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Aplicând succesiv această relație avem

$$\begin{aligned} N_c^+(n) &= N_c^+(n-1) + \lceil \log_2 n \rceil \\ &= N_c^+(n-2) + \lceil \log_2(n-1) \rceil + \lceil \log_2 n \rceil \\ &\dots \\ &= N_c^+(1) + \lceil \log_2 2 \rceil + \lceil \log_2 3 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 n \rceil. \end{aligned}$$

Cum $N_c^+(1) = 0$, obținem că

$$N_c^+(n) = \lceil \log_2 1 \rceil + \lceil \log_2 2 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 n \rceil,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{10}$$

Dar

$$\sum_{i=1}^{n} \lceil \log_2 i \rceil = n \lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Într-adevăr, egalitatea este evident valabilă pentru $n = 1$, iar pentru $n \geq 2$ notând $s = \lceil \log_2 n \rceil$ avem $s \in \mathbb{N}^*$ și $s - 1 < \log_2 n \leq s$, deci $2^{s-1} < n \leq 2^s$, iar pentru orice $i \in \{2, 3, \dots, n\}$ avem echivalențele

$$\lceil \log_2 i \rceil = j \Leftrightarrow j - 1 < \log_2 i \leq j \Leftrightarrow 2^{j-1} < i \leq 2^j \Leftrightarrow 2^{j-1} + 1 \leq i \leq 2^j;$$

astfel avem

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lceil \log_2 i \rceil &= \sum_{i=2}^{n} \lceil \log_2 i \rceil = \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} \lceil \log_2 i \rceil + \sum_{i=2^{s-1}+1}^{n} \lceil \log_2 i \rceil \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} j + \sum_{i=2^{s-1}+1}^{n} s = \sum_{j=1}^{s-1} j(2^j - 2^{j-1}) + s(n - 2^{s-1}) \\ &= \sum_{j=1}^{s-1} j \cdot 2^{j-1} + s(n - 2^{s-1}) = s \cdot 2^{s-1} - 2^s + 1 + s(n - 2^{s-1}) \\ &= ns - 2^s + 1 = n \lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1. \end{aligned}$$

Rezultă că

$$N_c^+(n) = \sum_{i=1}^{n} \lceil \log_2 i \rceil = n \lceil \log_2 n \rceil - 2^{\lceil \log_2 n \rceil} + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Dar

$$\log_2 n \leq \lceil \log_2 n \rceil < \log_2 n + 1,$$

deci

$$n \leq 2^{\lceil \log_2 n \rceil} < 2n.$$

Astfel rezultă că în *cazul cel mai defavorabil* numărul de *comparații de chei* verifică inegalitățile

$$n\log_2 n - 2n + 1 < N_c^+(n) < n\log_2 n + 1,\ \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{11}$$

Notând cu $N_c^-(n)$ numărul de *comparații de chei în cazul cel mai favorabil*, din (2) și (5) rezultă relația de recurență

$$N_c^-(n) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = 1, \\ N_c^-\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + N_c^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, & \text{dacă } n > 1. \end{cases} \tag{12}$$

Demonstrăm că șirul $(N_c^-(n))_{n\geq 1}$ este crescător, adică

$$N_c^-(n+1) \geq N_c^-(n),\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,$$

prin inducție.

Pentru $n = 1$ avem $N_c^-(2) = 1 > 0 = N_c^-(1)$.

Presupunem inegalitatea adevărată pentru orice număr din mulțimea $\{1, \ldots, n-1\}$ și o demonstrăm pentru n ($n \geq 2$). Într-adevăr, folosind relația de recurență (12), ipoteza de inducție pentru $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ când n este par, respectiv pentru $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ când n este impar, precum și inegalitatea evidentă $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, avem

$$\begin{aligned} N_c^-(n+1) &= N_c^-\left(\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil\right) + N_c^-\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor \\ &\geq N_c^-\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + N_c^-\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ &= N_c^-(n). \end{aligned}$$

Demonstrația prin inducție este încheiată.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și

$$t = \lfloor \log_2 n \rfloor, \tag{13}$$

deci $t \in \mathbb{N}$ și $t \leq \log_2 n < t + 1$, deci $2^t \leq n < 2^{t+1}$. Deoarece șirul $(N_c^-(n))_{n\geq 1}$ este crescător, rezultă că

$$N_c^-(n) \geq N_c^-(2^t). \tag{14}$$

Dar, conform relației de recurență (12) avem

$$N_c^-(2^t) = 2N_c^-(2^{t-1}) + 2^{t-1},\ \forall\, t \in \mathbb{N}^*.$$

Rescriem această egalitate sub forma

$$N_c^-(2^t) - t \cdot 2^{t-1} = 2\left(N_c^-(2^{t-1}) - (t-1)2^{t-2}\right),\ \forall\, t \in \mathbb{N}^*,$$

Aplicând succesiv această relație avem

$$\begin{aligned} N_c^-(2^t) - t \cdot 2^{t-1} &= 2\left(N_c^-(2^{t-1}) - (t-1)2^{t-2}\right) \\ &= 2^2\left(N_c^-(2^{t-2}) - (t-2)2^{t-3}\right) \\ &\ldots \\ &= 2^t\left(N_c^-(2^{t-t}) - (t-t)2^{t-t-1}\right) \end{aligned}$$

Cum $N_c^-(1)=0$ obținem că $N_c^-(2^t)-t\cdot 2^{t-1}=0$, deci

$$N_c^-(2^t)=t\cdot 2^{t-1},\ \forall t\in\mathbb{N}. \tag{15}$$

Din (14), (15) și (13) rezultă că în *cazul cel mai favorabil* numărul de *comparații de chei* verifică inegalitățile

$$N_c^-(n)\geq \lfloor \log_2 n\rfloor \cdot 2^{\lfloor \log_2 n\rfloor -1} > \frac{1}{4}\cdot n\log_2 n-\frac{1}{4}\cdot n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{16}$$

Din (11) și (16) rezultă că numărul de *comparații de chei* verifică inegalitățile

$$\frac{1}{4}\cdot n\log_2 n-\frac{1}{4}\cdot n<N_c(n)<n\log_2 n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{17}$$

Din relațiile (3) și (4) rezultă că numărul de *deplasări* efectuate de algoritm verifică relația de recurență

$$N_d(n)=\begin{cases} 0, & \text{dacă } n=1,\\ N_d\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil\right)+N_d\left(\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)+2n, & \text{dacă } n>1.\end{cases}$$

Această relație se rezolvă analog relației (6), obținându-se

$$N_d(n)=2\left(n\lceil\log_2 n\rceil-2^{\lceil\log_2 n\rceil}+n\right),\ \forall n\in\mathbb{N}^*,$$

deci

$$2n\log_2 n-2n<N_d(n)<2n\log_2 n+2n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{18}$$

Din relațiile (1), (17) și (18) rezultă că $T(n)=\Theta(n\log_2 n)$.

Metoda 2) Vom aplica Teorema Master. Conform descrierii recursive a algoritmului și utilizând complexitatea procedurii de interclasare (formulele pentru $\overline{N}_c\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$ și $\overline{N}_d\left(\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil,\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor\right)$), timpul de execuție $T(n)$ verifică relația de recurență

$$T(n)=2T(n/2)+\Theta(n),\ \forall\, n>1,$$

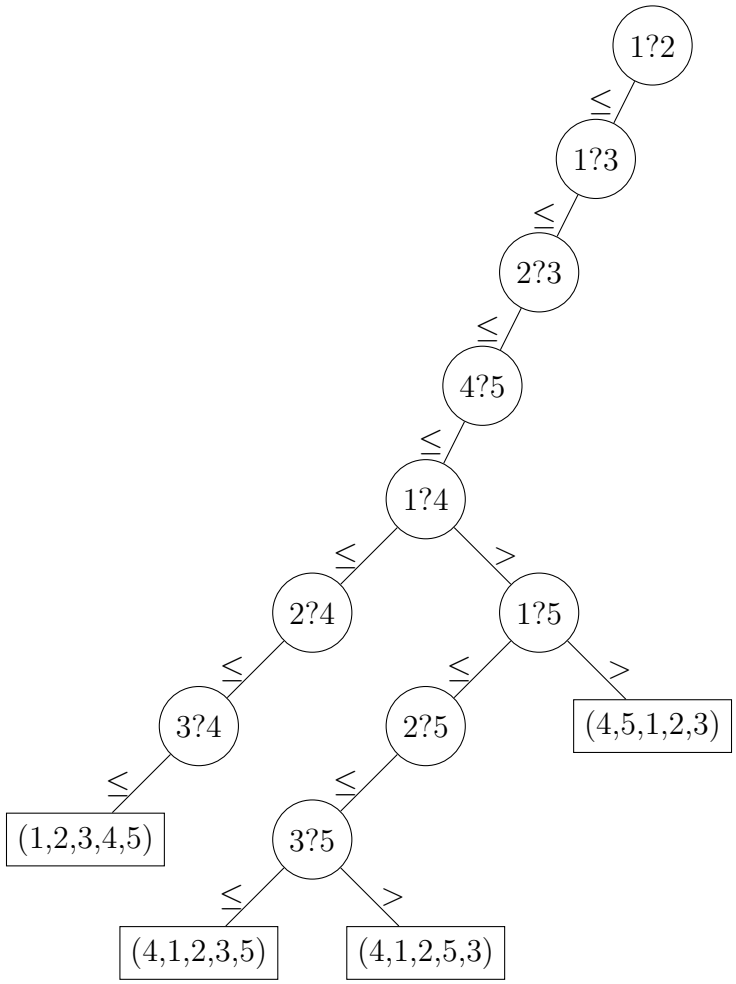
cu convențiile de notație din Teorema Master (Teorema 1 din [2]). Conform Cazului 2 al acelei teoreme (pentru $a=2,\ b=2,\ c=1=\log_b a$ și $k=0$) rezultă că $T(n)=\Theta(n\log_2 n)$. □

Următorul rezultat este o consecință directă a teoremei anterioare și a Teoremei 1 din [3] (care afirmă că orice algoritm optim de sortare, bazat pe comparații de chei, are complexitatea $\Theta(n\log_2 n)$).

Corolarul 4 (**optimalitatea algoritmului de sortare prin interclasare**). *Algoritmul de sortare prin interclasare este asimptotic-optim (în clasa algoritmilor bazați pe comparații de chei), atât în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil, cât și în raport cu timpul mediu de execuție.*

Observația 3. Mai mult, conform relațiilor (11) și (17) și Teoremei 1 din [3] rezultă că, exact ca la algoritmii optimi de sortare bazați pe comparații de chei, numărul de comparații de chei efectuate de algoritmul de sortare prin interclasare a unui vector cu n componente este chiar asimptotic echivalent cu $n\log_2 n$, atât în cazul cel mai defavorabil, cât și în cazul mediu (cazul timpului mediu de execuție).

Totuși, conform Corolarului 1 din [3], **algoritmul de sortare prin interclasare nu este optim, nici în raport cu timpul mediu de execuție**, deoarece arborele extins de sortare asociat nu are întotdeauna toate nodurile externe situate doar pe ultimul și, eventual, pe penultimul nivel, **nici în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil**, deoarece înălțimea acestui arbore nu este întotdeauna egală cu $\lceil \log_2 n! \rceil$. De exemplu, pentru $n = 5$ există noduri externe nesituate pe același nivel sau pe două nivele consecutive, iar înălțimea arborele extins de sortare asociat este mai mare decât $\lceil \log_2 5! \rceil = \lceil \log_2 120 \rceil = 7$, așa cum reiese din figura următoare, în care este reprezentată doar o parte a arborelui extins de sortare.



Observația 4. O altă justificare a neoptimalității (pure a) algoritmului de sortare prin interclasare este următoarea: în cazul cel mai defavorabil la sortarea unui vector cu n componente, numărul de *comparații de chei* efectuate de algoritmul mergesort este, conform (10),

$$N_c^+(n) = \lceil \log_2 1 \rceil + \lceil \log_2 2 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 n \rceil,$$

iar numărul de *comparații de chei* efectuate de orice algoritm optim este, conform Corolarului 1 din [3],

$$N_{def}(n) = \lceil \log_2 n! \rceil = \lceil \log_2 1 + \log_2 2 + \ldots + \log_2 n \rceil.$$

Evident, pentru orice numere reale x și y avem

$$\lceil x \rceil + \lceil y \rceil \geq \lceil x + y \rceil \tag{19}$$

(deoarece $\lceil x \rceil \geq x$, $\lceil y \rceil \geq y$, $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil \geq x + y$ și $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil \in \mathbb{Z}$, deci $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil \lceil x \rceil + \lceil y \rceil \rceil \geq \lceil x + y \rceil$). Folosind (19) rezultă că

$$N_c^+(n) = \lceil \log_2 1 \rceil + \lceil \log_2 2 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 n \rceil \geq \lceil \log_2 1 + \log_2 2 + \ldots + \log_2 n \rceil = N_{def}(n),$$

ceea ce era de așteptat, conform optimalității invocate! Mai mult, avem $N_c^+(5) = \lceil \log_2 1 \rceil + \lceil \log_2 2 \rceil + \lceil \log_2 3 \rceil + \lceil \log_2 4 \rceil + \lceil \log_2 5 \rceil = 0 + 1 + 2 + 2 + 3 = 8$, iar $N_{def}(5) = \lceil \log_2 5! \rceil = \lceil \log_2 120 \rceil = 7$, deci

$$N_c^+(5) > N_{def}(5).$$

Folosind această inegalitate strictă și inegalitatea (19), rezultă că pentru $n \geq 5$ avem

$$\begin{aligned} N_c^+(n) &= (\lceil \log_2 1 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 5 \rceil) + (\lceil \log_2 6 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 n \rceil) \\ &> \lceil \log_2 1 + \ldots + \log_2 5 \rceil + \lceil \log_2 6 + \ldots + \log_2 n \rceil \\ &\geq \lceil \log_2 1 + \ldots + \log_2 5 + \log_2 6 + \ldots + \log_2 n \rceil = N_{def}(n), \end{aligned}$$

deci

$$N_c^+(n) > N_{def}(n), \ \forall\, n \geq 5.$$

Prin urmare algoritmul mergesort nu este optim în raport cu timpul de execuție în cazul cel mai defavorabil. Cum, conform Corolarului 1 din [3], optimalitatea în cazul timpului mediu de execuție implică optimalitatea în cazul cel mai defavorabil, rezultă că algoritmul mergesort nu este optim nici în raport cu timpul mediu de execuție.

Observația 5. Complexitatea algoritmului mergesort este una dintre cele mai bune din punct de vedere al numărului de comparații de chei, în clasa algoritmilor de sortare bazați pe astfel de comparații. Un dezavantaj este însă faptul că se utilizează un vector suplimentar de lucru, care poate avea dimensiunea foarte mare (fiind egală cu cea a vectorului ce trebuie sortat).

Bibliografie

[1] Gh. Barbu, I. Văduva, M. Boloșteanu, *Bazele informaticii*, Editura Tehnică, București, 1997.

[2] C. Bălcău, *Optimalitatea algoritmului de căutare binară*, MATINF I (2018), nr. 1, 39–51.

[3] C. Bălcău, *Complexitatea algoritmilor de sortare*, MATINF II (2019), nr. 3, 41–48.

[4] A. Carabineanu, *Structuri de date*, `http://ebooks.unibuc.ro/informatica/carabineanu/CARA_STR.pdf`.

[5] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, 2009.

[6] H. Georgescu, *Tehnici de programare*, Editura Universității din București, București, 2005.

[7] D.E. Knuth, *The Art Of Computer Programming. Vol. 3: Sorting and Searching*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1998.

[8] R. Sedgewick, P. Flajolet, *An Introduction to the Analysis of Algorithms*, Addison-Wesley, New Jersey, 2013.

[9] R. Sedgewick, K. Wayne, *Algorithms*, Addison-Wesley, Massachusetts, 2011.

Protocoale

Marin Cristea[1]

În rețele există două scheme de adresare: una folosește adresa MAC, specifică nivelului legături de date, iar cealaltă adresa logică identificată în cadrul nivelului Rețea din modelul OSI. Un exemplu de adresă logică este adresa IP. Router-ul este un dispozitiv fizic care comută pachetele între rețele în funcție de adresa nivelului 3. Este capabil să ia decizii optime în alegerea rutei optime către destinație. Comutarea pachetelor este realizată și de către o punte sau un switch însă în funcție de adresa fizică care este implementată în hardware și nu permite crearea de ierarhii. Adresa IP este implementată în software și se poate diviza pe mai multe clase în funcție de diferite criterii și poate fi foarte ușor schimbată. Este frecventă împărțirea stațiilor de către administrator în funcție de clasa de adresare, locație geografică, departament, etc. Switch-ul (puntea) se folosește pentru a conecta segmente de rețea; router-ul este utilizat optim în conectarea rețelelor care se pot afla la mari distanțe geografice. Acest aspect a fost punctul de plecare în crearea Internetului.

Conexiunea dintre o rețea și router poartă numele de **interfață** sau port. În rutarea pe bază de adrese IP, fiecare interfață trebuie să aibă o adresă de rețea/subrețea unică.

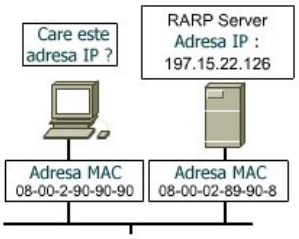
Observație. Oricare două rețele conectate la Internet, indiferent de locația lor geografică, trebuie să aibă adrese IP diferite pentru ca procesul de rutare să poată avea loc.

Metode de asignare a adreselor IP

Există două posibilități de a asigna o adresă IP unei stații: statică și dinamică. Indiferent de metoda aleasă, două interfețe nu pot avea aceeași adresă.

Asignarea statică implică deplasarea la fiecare stație și atribuirea unei adrese IP manual. Această abordare implică menținerea unor tabele foarte exacte cu fiecare stație și adresa pe care o are, în caz contrar putând apare dubluri de adrese. Sisteme de operare cum ar fi Windows 95/98/NT fac anumite verificări înainte de a inițializa protocolul TCP/IP. Dacă se descoperă dubluri de adrese, protocolul nu se încarcă și se trimite un mesaj de eroare. Cum nu toate sistemele de operare identifică această situație, menținerea tabelelor este obligatorie. Asignarea dinamică se poate realiza cu una din următoarele metode:

Protocolul de rezoluție inversă a adresei [1] (Reverse Address Resolution Protocol - RARP) leagă o adresă MAC de o adresă IP. Această legare permite anumitor dispozitive să încapsuleze datele înainte de a le trimite în rețea. Metoda necesită prezența unui RARP server în rețea care să răspundă cererilor.



[1]Profesor, Colegiul Național „Ion C. Brătianu”, Pitești, marin.cristea@gmail.com

Să considerăm un exemplu în care o stație dorește să transmită un pachet, își cunoaște adresa MAC dar nu cunoaște adresa IP. Pentru ca destinatarul să poată reține datele în vederea transmiterii către nivelurile superioare din modelul OSI, sursa trebuie să includă atât adresa fizică cât și adresa logică (IP). În acest scop se inițiază un proces numit ,,cerere RARP" (RARP request) în urma căruia va cunoaște adresa IP. Sursa va construi un pachet de cerere RARP care se va trimite către toate stațiile din rețea folosind o adresă cu destinație multiplă. În acest pachet câmpul cu adresa IP a sursei este goală. Cererea este primită și de serverul RARP care va răspunde stației cu adresa solicitată.

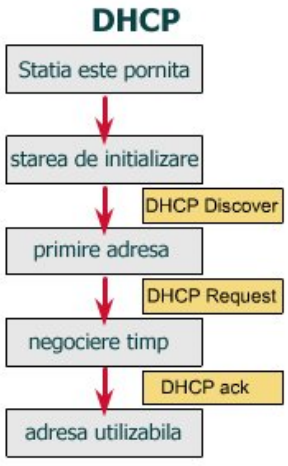
Protocolul BOOTstarp

Acest protocol este folosit la pornirea unui dispozitiv pentru obținerea adresei IP. Un mesaj UDP (User Datagram Protocol) este încapsulat într-o datagramă IP și trimis în rețea sub formă de mesaj cu destinație multiplă. Serverul BOOTP primește cererea și răspunde în același mod printr-un mesaj broadcast care include adresa IP. Analog RARP, protocolul BOOTstrap lucrează într-un mediu client-server și necesită schimbul unui singur pachet. Deosebirea este că primul furnizează numai adresa IP, pe când acesta mai transmite adresa router-ului (default gateway), adresa serverului și încă un câmp cu informații opționale. Nu poate însă să furnizeze adrese IP dinamice; serverul trebuie să cunoască un set de adrese din care va transmite atunci când primește cerere.

Protocolul de configurare dinamică a gazdei (Dynamic Host Configuration Protocol - DHCP)

DHCP [2] este un succesor al protocolului BOOTstarp. În plus, DHCP permite unei gazde să obțină o adresă IP repede și dinamic. Serverul DHCP trebuie să cunoască doar intervalul de adrese pe care are dreptul să le folosească. Datele de configurare se transmit printr-un singur mesaj, iar serverul poate să transmită și alte date auxiliare.

Atunci când o stație DHCP este pornită, se intră automat în starea de inițializare, ce constă în transmiterea unui mesaj numit DHCP Discover, care este un pachet UDP. Următoarea etapă este cea în care primește din partea serverului un răspuns numit DHCP Offer care conține adresa cerută.Stația va negocia cu serverul intervalul de timp pe care îl are la dispoziție în utilizarea adresei, fără a o schimba, prin trimiterea unui alt mesaj numit DHCP Request. Serverul confirmă cererea stației printr-un răspuns numit DHCP Ack (acknowledge). Abia după primirea acestui ultim pachet stația poate să folosească adresa.

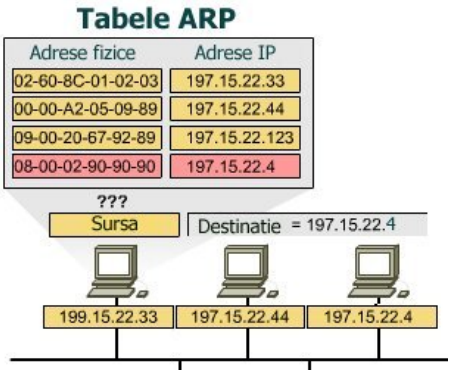


Cerere ARP

Comunicarea între două stații este posibilă atunci când se cunosc ambele adrese MAC și IP. Dacă se cunoaște adresa IP a destinatarului, atunci trebuie să se determine și adresa fizică.

Modelul TCP/IP conține un protocol numit ARP (Address Resolution Protocol) care poate să determine automat adresa fizică dacă se cunoaște adresa IP.

Pentru a fi în orice moment capabile să comunice între ele, stațiile din același segment păstrează în memoria RAM tabele în care se află cele două tipuri de adrese necesare: MAC și IP. Acestea poartă numele de tabele ARP și practic leagă o adresă fizică de una logică. Ele se mențin automat pentru fiecare gazdă din rețea, deși este posibil în cazuri extreme să se configureze manual. Atunci când stația cunoaște adresa IP a destinatarului, consultă tabelele ARP, extrage adresa fizică și o inserează în pachet.



Dacă în tabela ARP nu se găsește adresa fizică a unei stații al cărei IP este cunoscut, atunci se începe un proces numit ,,cerere ARP" (ARP request). Sursa va construi un pachet ARP pe care îl va trimite la toate stațiile din rețea. Pentru a se asigura că toate stațiile vor verifica pachetul, se utilizează o adresă cu destinație multiplă (broadcast).

Se va completa adresa IP cunoscută a destinatarului iar la adresa MAC se va scrie numai cifra F astfel: FF-FF-FF-FF-FF-FF. Fiecare stație va examina pachetul; unde va coincide adresa IP, înseamnă că trebuie să se răspundă printr-un pachet care să conțină și adresa MAC. Acest răspuns poartă numele de ARP reply. Stația care a inițiat cererea va primi pachetul și își va actualiza tabela ARP, moment în care poate să demareze schimbul de date cu destinatarul.

Un alt protocol inclus in TCP/IP este ICMP (Internet Control Message Protocol) care se folosește de către o stație pentru a raporta o problemă expeditorului unui mesaj. De exemplu dacă un router primește un pachet pe care nu poate să-l transmită mai departe, atunci va apela la protocolul ICMP pentru a-l anunța pe expeditor. De asemenea se poate folosi pentru a determina dacă se poate ajunge la un anumit destinatar înainte de a trimite pachetul de date. Operația se numește ,,ping" și se bazează pe un ecou la cerere (echo request/echo reply).

Port implicit (default gateway)

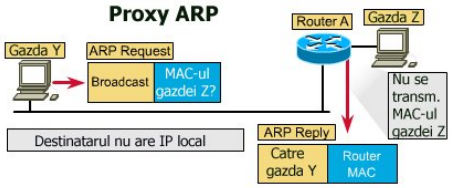
Comunicarea între două gazde aflate în rețele diferite este posibilă numai dacă acestea au primit o adresă drept port implicit (default gateway). Acesta trebuie să fie adresa IP a interfeței router-ului care este conectat la segmentul gazdei respective iar gazda și interfața vor avea adrese care aparțin segmentului comun.

Dacă nu este definit un port implicit, comunicația este posibilă numai între gazdele care aparțin aceluiași segment. O stație cu intenții de comunicare și care posedă IP-ul destinatarului va căuta în tabela ARP proprie adresa MAC. Dacă nu o găsește trebuie să cunoască un port implicit pentru a trimite pachetele. Dacă portul nu este definit, datele nu se pot livra.

Comunicarea între subrețele

O problemă importantă în rețele este comunicarea între gazde aflate în segmente diferite. Sunt două etape ale acestei probleme. Prima ar fi obținerea adresei MAC a destinatarului iar a doua transferul pachetului de la un segment la altul pentru a ajunge în final la destinație.

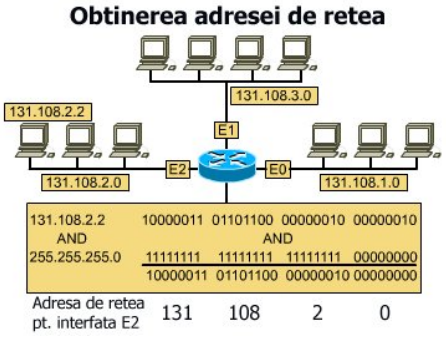
Proxy ARP este o variantă de protocol ARP, în care un dispozitiv intermediar cum ar fi router-ul, trimite un răspuns ARP către gazda care a efectuat cererea. Router-ele care „înțeleg" proxy ARP vor răspunde cu propria adresa MAC la acele cereri pentru care adresa IP nu se găsește între segmentele pe care le conectează. Practic va transmite adresa fizică a interfeței care se găsește în același segment cu gazda.



Dacă router-ul observă că IP-ul pentru care se cere adresa fizică este local, atunci va ignora cererea. Motivul pentru această decizie este că cererea are o adresă cu destinație multiplă (broadcast) și toate stațiile au primit-o. Una dintre ele este destinatarul pentru care se cere MAC-ul și aceasta va răspunde stației care a efectuat apelul.

Protocol rutabil

IP este un protocol corespunzător nivelului rețea din modelul OSI și care se poate ruta într-un sistem de rețele, cum ar fi Internetul. Protocoalele care oferă suport pentru nivelul rețea se numesc protocoale rutabile (routed protocols sau routable protocols). Deși IP este cel mai cunoscut protocol rutabil, mai există și altele, cum ar fi *IPX/SPX* sau *AppleTalk*. Din categoria protocoalelor care nu se pot ruta se poate exemplifica NetBEUI, un protocol rapid și eficient dacă se folosește într-un singur segment de rețea.



Pentru ca un protocol să poată fi rutabil, trebuie să fie capabil de a asigna adresă unei rețele și fiecărei gazde din rețea. Protocoale cum ar fi IPX necesită numai adresa rețelei, deoarece folosește adresa fizică pentru identificare. IP necesită furnizarea adresei complete plus masca de rețea. Printr-o operație logică se obține adresa de rețea.

Pentru ca un protocol să poată fi rutabil, trebuie să fie capabil de a asigna adresă unei rețele și fiecărei gazde din rețea. Protocoale cum ar fi IPX necesită numai adresa rețelei, deoarece folosește adresa fizică pentru identificare. IP necesită furnizarea adresei complete plus masca de rețea. Printr-o operație logică se obține adresa de rețea.

Protocol de rutare

Protocolul de rutare (routing protocol) (a nu se confunda cu protocolul rutabil!) are rolul de a determina calea pe care protocoalele rutabile trebuie să o străbată către destinație. Exemple de asemenea protocoale sunt: Routing Information Protocol (RIP), Interior Gateway Routing Protocol (IGRP), Enhanced Interior Gateway Routing Protocol (EIGRP), și Open Shortest Path First (OSPF).

Protocolul de rutare ajută router-ul să-și construiască o hartă internă cu router-ele vecine, care este suportul pentru selecția rutei optime sau comutarea pachetelor. Această hartă este o parte din tabela de rutare a fiecărui router.

Router-ele folosesc protocoalele de rutare pentru a face schimb de tabele de rutare sau pentru a partaja informații de rutare. În interiorul unei rețele, cel mai cunoscut protocol folosit pentru a schimba informații de rutare între router-e (din aceeași rețea) este Routing Information Protocol (RIP), care aparține unei categorii numite Interior Gateway Protocol (IGP). El calculează distanța până la destinatar exprimând-o în numărul de noduri (router-e sau hop-count) prin care se trece. RIP permite router-elor să facă schimb de tabele de rutare la fiecare 30 de secunde. Un dezavantaj al acestui protocol este că necesită o conectare permanentă între router-ele vecine iar schimbul de tabele consumă o parte din lățimea de bandă. Dacă aceasta nu este suficient de mare, traficul va avea de suferit.

Pentru a ajuta router-ele să determine ce cale să folosească în transmiterea datelor, RIP se bazează pe un concept numit vector-distanță (distance-vector). De fiecare dată când un pachet trece printr-un router către o nouă rețea, se consideră că a trecut de un hop. O cale care are un hop-count egal cu patru înseamnă că pachetul trebuie să treacă prin patru router-e pentru a ajunge la rețeaua care conține destinatarul. Dacă există mai multe rute către destinație, atunci router-ul va alege pe aceea care are un hop-count minim.

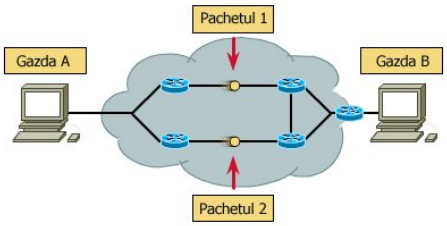
Deoarece vectorul distanță are un singur element de analiză, nu rezultă că ruta furnizată este și cea mai rapidă. Alte elemente pot să influențeze luarea deciziei, cum ar fi lățimea de bandă, capacitatea de trecere (throughput) la diferite momente, etc. există protocoale de rutare care analizează aceste informații. Cu toate acestea, RIP rămâne încă foarte popular și este implementat de multe router-e, poate și datorită faptului că a fost primul protocol cu această funcție.

O altă problemă care poate să apară dacă este folosit RIP-ul este atunci când destinația este prea îndepărtată pentru a fi atinsă. RIP limitează numărul maxim de hopuri la cincisprezece. Dacă nu se poate ajunge la destinație cu acest număr, atunci se concluzionează că rețeaua nu se poate accesa.

Se poate menționa că un router suportă în același timp mai multe protocoale de rutare și actualizează permanent tabelele pentru cel mai cunoscute protocoale rutabile. Această particularitate permite router-ului să transmită pachete de la diferite protocoale rutabile pe aceeași legătură fizică.

Serviciu de rețea fără conexiune

O mare parte din serviciile unei rețele sunt realizate fără conexiune (connectionless). Fiecare pachet este tratat separat, ceea ce însemnă că pot ajunge pe rute diferite la destinație. Ele vor fi însă reasamblate de către destinatar după primirea întregului set. Destinatarul nu este contactat înainte de trimite un pachet.



O comparație se poate face cu sistemul poștal; expeditorul pune o scrisoare la poștă fără să îl anunțe pe destinatar. Acesta va afla de scrisoare atunci când o va primi.

Serviciu de rețea cu conexiune

Serviciul de rețea cu conexiune (connection-oriented) stabilește o legătură directă între expeditor și destinatar înaintea începerii transferului de date. Dacă legătura nu poate fi

realizată, niciun transfer nu are loc. Un exemplu poate fi sistemul de telefonie unde mai întâi se realizează o legătură directă între apelant și apelat după care se trece la efectuarea convorbirii.

Serviciul de rețea fără conexiune se mai numește și comutare de pachete. Deoarece acestea folosesc diferite rute, unele dintre ele pot să nici nu ajungă. Criteriile de selecție a rutei pot să difere de la un moment la altul, mai ales la protocoalele de rutare mai performante (nu RIP!).

Serviciul de rețea cu conexiune se mai numește și comutare de circuit. Se creează un circuit virtual care este menținut atâta timp cât este nevoie pentru transferul datelor, după care este întrerupt. Toate pachetele vor folosi aceeași cale.

Internetul este o imensă rețea fără conexiune în care pachetele sunt manevrate de IP. Protocolul TCP, care aparține nivelului 4 din modelul OSI, poate să adauge serviciul de conexiune care implică siguranță în livrarea datelor.

IP este un serviciu de rețea fără conexiune; fiecare pachet este tratat independent. De exemplu, dacă se descarcă un fișier cu aplicația FTP, IP nu va trimite fișierul într-un mare flux de date. Fiecare poate avea o rută diferită de a celorlalte, sau se pot chiar pierde. În aceste situații intervin protocoalele nivelului Transport din modelul OSI care vor determina ce pachete s-au pierdut și vor cere retransmiterea. Tot la nivelul transport se va realiza reordonarea pachetelor chiar dacă acestea au sosit la momente diferite.

Particularități ale tabelelor de rutare

Cu ajutorul tabelei de rutare un dispozitiv de rețea cum ar fi puntea sau switch-ul, leagă o adresă IP de adresa fizică. Acestea intră in tabelă numai dacă dispozitivul care posedă este ,,văzut" în rețea în mod direct, fără intermediari. Se cunoaște foarte puțin sau deloc despre ce este ,,dincolo" de rețeaua proprie.

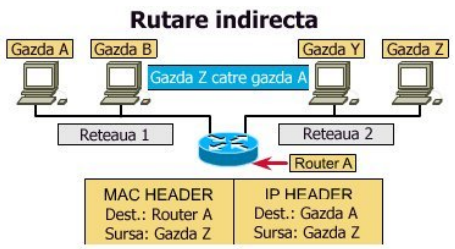
Router-ele construiesc tabele care descriu toate rețelele conectate la ele. Dacă s-ar memora date numai despre vecinii router-elor, atunci mecanismul de selecție a rutei nu ar funcționa eficient. În tabelele router-elor se găsesc informații despre rețele aflate la multe hopuri distanță; cu cât acest număr este mai mare cu atât alegerea rutei este mai bună.

Există situația ca un router să primească un pachet a cărui destinație să nu se găsească în tabela de rutare. Pentru aceste cazuri el trebuie să fie configurat cu o adresă implicită unde va livra pachetele; de obicei acestea se vor livra către un router cu mai multe conexiuni care să aibă o perspectivă mai largă despre rețelele din jurul lui. Dacă nici acest router nu găsește adresa destinatarului în tabele, atunci pachetul se ignoră.

O altă situație în care router-ul nu poate să livreze mai departe un pachet ester atunci când nu cunoaște adresa MAC a următorului router. Se va proceda analog cu o stație dintr-o rețea locală, dar între router-e. Pe interfața unde dorește să transmită pachetul, router-ul va transmite un ARP request. Această cerere va ajunge la router-ul unde se dorește transmiterea pachetului, care va răspunde cu un ARP reply în care a pus și propria adresă MAC.

Rutare indirectă

Prin mecanismul numit Proxy ARP o gazdă care nu cunoaște adresa MAC a destinatarului va primi din partea router-ului adresa MAC a interfeței care conectează (sub)rețeaua gazdei respective. Router-ul cu acest rol poartă numele de default gateway.



La încapsularea pachetului, gazda va pune la adresa IP adresa destinatarului, iar la adresa MAC va fi adresa interfeței router-ului.

În momentul primirii pachetului, router-ul observă cu nu este ultimul destinatar și își consultă tabela de rutare pentru a identifica adresa IP din pachet. Dacă o găsește, atunci înlocuiește adresa MAC a propriei interfețe cu adresa MAC a router-ului care conectează rețeaua destinatarului, sau care reprezintă următorul hop (nod de rețea sau router) în drumul către destinatar. Dacă tabela de rutare nu conține adresa destinatarului, atunci va transmite pachetul cu adresa MAC a router-ului implicit, dacă acesta a fost definit. Pachetul se pierde dacă nu există un router implicit. Acest mecanism de înlocuire a adresei MAC la fiecare router prin care pachetul trece în drumul către destinatar poartă numele de rutare indirectă.

Alte protocoale de rutare

Așa cum s-a amintit anterior, un protocol care se poate ruta între rețele poartă numele de protocol rutabil. Alături de cel mai cunoscut protocol rutabil, IP, se mai pot adăuga IPX și AppleTalk.

Router-ele folosesc protocoalele de rutare pentru a face schimb de tabele de rutare sau partajarea informațiilor. Altfel spus, protocoalele de rutare determină cum se pot ruta protocoalele rutabile. Exemple de protocoale de rutare sunt RIP, IGRP, EIGRP, OSFP.

Protocoalele de rutare se pot clasifica în două categorii: interioare (Interior Gateway Protocol - IGP) și exterioare (Exterior Gateway Protocol - EGP). Toate protocoalele de rutare enumerate mai sus aparțin categoriei IGP. Un exemplu de protocol exterior este Border Gateway Protocol – BGP.

RIP, ale cărui origini pornesc de la firma Xerox, a fost abordat în paragrafele anterioare.

IGRP și EIGRP au fost dezvoltate de corporația Cisco Systems, care este considerată proprietara acestor protocoale.

Un protocol precum IGRP (Interior Gateway Routing Protocol) a fost necesar pentru a rezolva problemele apărute în sistemele de rețele de mari dimensiuni unde popularul RIP nu se mai putea utiliza eficient. Analog RIP, IGRP este un protocol care folosește vectorul distanță în alegerea celei mai bune rute, însă cu mai multe criterii de decizie. Pe lângă numărul de hopuri, se mai ia în considerare lățimea de bandă, gradul de utilizare, întârzierile, și siguranța rutei. De asemenea, administratorul de rețea poate să asocieze fiecărui criteriu un coeficient, influențând astfel alegerea rutei după propria analiză. Numărul maxim de hopuri pe care un pachet poate să le străbată în drumul către destinatar este 255.

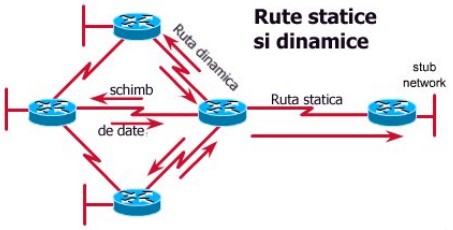
EIGRP (Enhanced Interior Gateway Routing Protocol) este o versiune avansată a IGRP, care poate să aplice funcții complexe în alegerea rutei. Se poate chiar renunța la vectorul distanță dacă altă metodă este mai bună la un moment dat, pentru a reveni atunci când este cazul.

OSFP (Open Shortest Path First) este un protocol performant care nu folosește vectorul distanță. Router-ul care aplică acest protocol va construi o structură ierarhizată a router-elor de a căror existență știe, rădăcina fiind chiar el. Fiecare legătură între două router-e va avea un cost strict pozitiv, care se calculează în funcție de diferiți factori, cum ar fi viteza, intensitatea traficului, siguranța legăturii și securitatea datelor. Către fiecare router cunoscut se va calcula drumul optim folosind algoritmi adecvați. Un asemenea algoritm este algoritmul lui Dijkstra. Ruta se recalculează de fiecare dată când se schimbă un criteriu care a fost folosit în selecție.

Informațiile care se găsesc în tabelele de rutare se pot introduce manual de către administratorul rețelei sau se pot adăuga automat printr-o ,,corespondență" între router-e, atunci când acestea își desfășoară activitatea. Dacă administratorul introduce manual o rută atunci aceasta se va numi **rută statică**, toate celelalte numindu-se **rute dinamice**.

Dacă router-ul poate să învețe informațiile de rutare automat poate părea fără sens intervenția administratorului. Cu toate acestea, există situații când se impune o configurare manuală. Exemple ar putea fi:

1. Verificarea traficului pe o anumită legătură fizică. Se va configura router-ul astfel încât alte rute, deși mai bune, să nu fie folosite.
2. Controlul selecției realizate de router. Se poate testa dacă ruta aleasă la un moment dat de router este cea mai bună sau nu.
3. Dacă există o singură legătură către o anumită rețea. În această situație chiar se impune intervenția administratorului, deoarece nu are sens ca router-ul să consume timp în căutarea altor variante de acces din moment ce se știe că nu există. Rețelele cu un singur drum de acces poartă numele de ,,stub network".

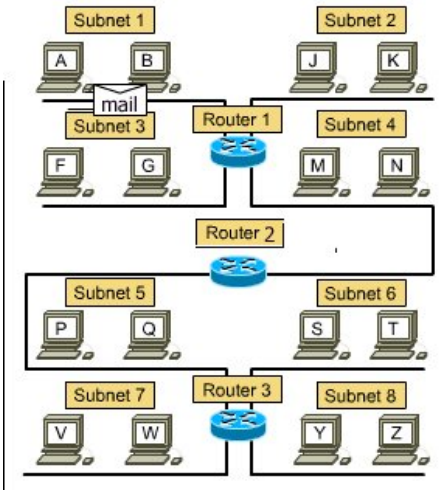


Rutarea dinamică este atunci când router-ele își trimit periodic mesaje de actualizare a tabelelor de rutare. De fiecare dată când un router primește un mesaj de la un alt router, el va recalcula toate drumurile afectate de modificarea primite și va anunța la rândul lui mai departe. Tabelele de rutare rămân astfel adaptate la condițiile rețelei.

Înainte de apariția rutării dinamice, distribuitorii de router-e trebuiau să configureze fiecare aparat în parte în funcție de natura rețelelor pe care le conecta. Ei se deplasau la fiecare modificare a rețelei să reconfigureze router-ul. Pe măsură ce rețelele au început să se dezvolte ca număr de stații sau locații geografice, configurarea manuală era din ce în ce mai dificilă. Rutarea dinamică a devenit o necesitate, fără de care Internetul nu ar exista. Toate protocoalele descrise mai sus suportă rutarea dinamică.

Rutarea cu RIP

Să presupunea că dispunem de o rețea din clasa B împărțită în 8 subrețele cu ajutorul a 3 router-e. Gazda A dorește să trimită un pachet gazdei Z. Datele coboară de la nivelul Aplicație către nivelul Fizic. Nivelul Transport împarte datele în segmente de lungimi egale. La nivelul Rețea se completează adresa IP a sursei și a destinatarului, transformând segmentul într-un pachet. Nivelul imediat următor, Legături de Date, adaugă la sursă adresa MAC a gazdei iar la destinație adresa interfeței router-ului care conectează segmentul gazdei.



Pachetul a devenit la nivelul 2 un cadru. Gazda A ,,vede" subrețeaua 8 ca o rețea separată,

deci nu va putea trimite datele direct, ci numai prin intermediul portului implicit (default gateway) care este interfața router-ului 1.

Pe măsură ce cadrul se transmite în subrețeaua 1, nicio gazdă nu face copii dacă adresa MAC nu se potrivește. Router-ul este cel care preia datele în vederea prelucrării. El va extrage adresa MAC și transferă datele nivelului Rețea care va verifica adresa IP. Adresa este corespunzătoare unei gazde din subrețeaua 8, iar protocolul RIP determină că se poate ajunge acolo dacă se trece de trei hopuri cu ieșire prin interfața către subrețeaua 4.

Pachetul coboară din nou la nivelul 2 unde primește o nouă adresă MAC, aceea a interfeței router-ului 2, în timp ce adresa IP rămâne neschimbată. După completarea adresei pachetul se transmite in subrețeaua 4 către toate gazdele.

În subrețeaua 4 nicio gazdă nu preia pachetul deoarece adresa MAC nu se potrivește. Router-ul 2 observă că adresa din pachet coincide cu adresa interfeței, deci decapsulează cadrul și transmite pachetul nivelului Rețea. Protocolul de rutare determină că rețeaua destinatară este cu două hopuri mai departe prin interfața corespunzătoare subrețelei 5.

Pachetul coboară la nivelul Legături unde adresa MAC a destinatarului se schimbă din nou cu adresa interfeței router-ului 3. Este transmis în subrețeaua 5 cu aceeași adresă IP.

Router-ul 3 se recunoaște ca destinatar al pachetului și îl preia. La nivelul Rețea se determină că destinatarul pachetului este o gazdă din subrețeaua 8, care este atașată direct la una din interfețe. Se coboară pachetul la nivelul 2 unde adresa MAC sursă devine adresa router-ului 3 iar adresa MAC destinație va fi adresa gazdei Z pe care router-ul o cunoaște. Adresa IP nu se schimbă în timp ce pachetul este transmis în subrețeaua 8.

Fiecare stație din subrețea verifică pachetul dar numai stația Z decide la nivelul 2 că adresa MAC coincide și la nivelul Rețea că adresa IP din pachet este propria adresă. Datele sunt decapsulate pe măsură ce urcă în nivelurile modelului OSI, până ce ajung la nivelul Aplicație, care le va oferi aplicației utilizatorului.

Bibliografie

[1] http://www.cisco.com/

[2] http://www.ietf.org/

Concursul ,,Dräexlmaier IT Day", Ediția a II-a, ianuarie 2020

Mihai-Radu Găman[1] *și Maria Miroiu*[2]

Departamentul **IT Center Pitești** din cadrul companiei **DRÄXLMAIER Group** a organizat în ianuarie 2020 **a doua ediție a concursului ,,Dräxlmaier IT Day"**. Au participat la concurs studenți de la domeniul de licență Informatică din cadrul Facultății de Științe, Educație Fizică și Informatică, Universitatea din Pitești.

Data limită de depunere a proiectelor a fost 21 ianuarie 2020, iar prezentarea proiectelor s-a desfășurat pe 28 ianuarie 2019. Nu au fost restricții în ceea ce privește limbajele de programare.

Premiile oferite: premiul I a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 1400 lei și a fost câștigat de studenta Năstase Mariana Mădălina de la Informatică, anul 3, premiul al II-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 700 lei și a fost câștigat de studentul Anghel Valentin George de la Informatică, anul 2, iar premiul al III-lea a constat dintr-un voucher de cumpărături pe platforma Emag în valoare de 250 lei și a fost câștigat de o echipă de 3 studenți de la Informatică, anul 3: Ciolcă Andrei Iulian, Zamfir Andrei-Gabriel și Drăgușin Răzvan-Vasile. Juriul a fost compus din mai mulți specialiști din cadrul IT Center Pitești, Draexlmaier Group.

Scopul principal a constat în **implementarea unui sistem de aplicații prin intermediul căreia utilizatorii să poată realiza o rezervare a unei săli de sedințe**. De asemenea, un raport al acestor rezervări va trebui să fie disponibil la cerere. Datele vor fi stocate într-o bază de date relaționale (MS Access, mySql, Oracle, etc.).

1 Model entități

Informațiilor stocate în sistem (tabele în baze de date relaționale) le sunt asociate următoarele entități: <**camera_sedinte**>, <**rezervare**> și <**utilizator**>.

Diagrama conceptuală a acestor entități și relațiile dintre ele sunt descrise în imaginea următoare.

[1]Head of Delivery Supply Chain Management, IT Center Pitești, Dräexlmaier Group, Pitești, mihai.gaman@draexlmaier.com

[2]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

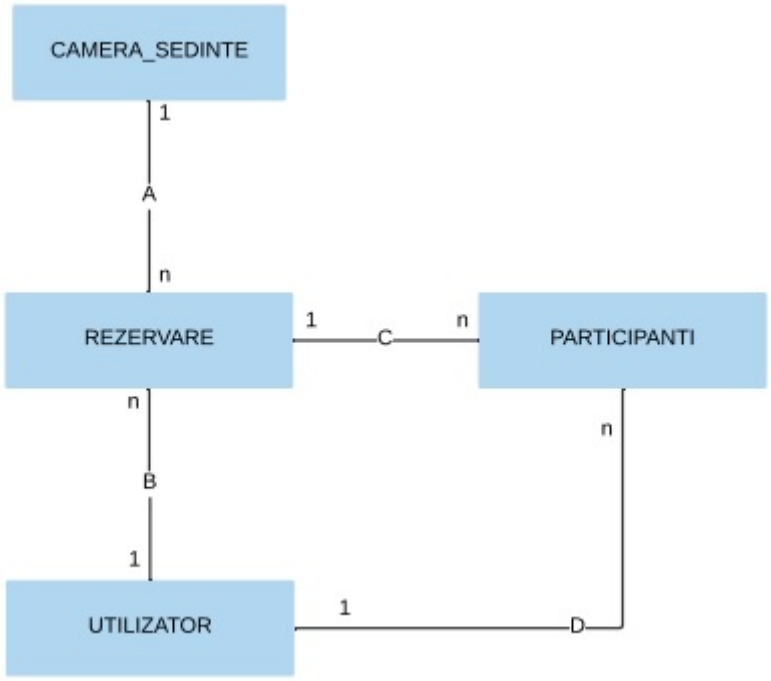


Figura 1. Relațiile între entități

2 Descrierea relațiilor

A – o <camera_sedinte> poate fi rezervată o singură dată într-un interval orar dat;
B – un <utilizator> poate rezerva una sau mai multe săli de ședințe chiar și în același interval de timp;
Această relație definește de fapt cine este organizatorul rezervării.
C – definește lista participanților la o ședință dată de o rezervare;
D – definește care sunt utilizatorii participanți la o ședință dată de o rezervare.

Entitatea <camera_sedinte>

Reprezentarea unei săli de ședințe în sistemul nostru va avea un indentificator unic, dar și un nume.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
Id	Text	Obligatoriu	Indentificatorul va fi o cheie artificială - un număr generat în secvență
Nume	Text	Obligatoriu	Numele sălii – va fi administrat de către utilizatori
Adresa	Text	Obligatoriu	Adresa sălii de ședințe
Capacitate_Maxima	Număr	Obligatoriu	Numărul maxim de participanți într-o ședință în acea sală

Entitatea <utilizator>

Un <utilizator> este o entitate ce va fi folosită pentru a stoca date despre utilizatorii sistemului de rezervări.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
Id	Text	Obligatoriu	O cheie naturală sau artificială (de ex. CNP, număr de marcă sau un număr oarecare)
Nume	Text	Obligatoriu	Numele organizatorului
Email	Text	Obligatoriu	Emailul organizatorului, care va fi folosit pentru validarea unei rezervări, dar și pentru un reminder
Este_Organizator	Boolean	Obligatoriu	Un flag ce va indica dacă utilizatorul poate iniția sau nu rezervări

Entitatea <rezervare>

Entitatea va defini relația de mai mulți la mai mulți între <sala_sedinte> și <utilizator>. Adiacent va stoca și informații referitoare la statusul rezervării: dacă a fost sau nu confirmată și cine este organizatorul.

Atribut	Tip	Validare	Descriere
Id	Numar	Obligatoriu	Identificatorul unic al rezervării (poate fi o secvență numerică)
Description	Text	Obligatoriu	Motivul rezervării
Id_Organizator	Text	Obligatoriu	Id-ul <utilizator>-ului care face rezervarea
Este_Confirmata	Boolean	Obligatoriu	Flag ce indică dacă s-a făcut confirmarea rezervarii. Este folosită pentru securitate – utilizatorul va primi un email pentru a confirma rezervarea.

Entitatea <participanti>

Această entitate se referă la o funcționalitate a sistemului ERP ce face posibilă startarea unei proceduri de către utilizator.

Atribut	**Tip**	**Validare**	**Descriere**
Id_rezervare	Număr	Obligatoriu	Indentificatorul unei rezervări, care face parte din cheia primară împreună cu id-ul utilizatorilor (participanților)
Id_Participant	Text	Obligatoriu	Id <utilizator>, necesar pentru a indentifica toți participanții într-o anume ședință rezervată
A_Confirmat	Boolean	Obligatoriu	Valoare logică ce indică dacă participantul respectiv a confirmat sau un participarea

3 Cerințe funcționale

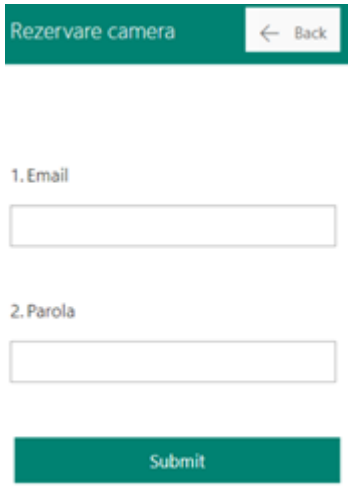
Proiectul presupune realizarea următoarele componente:

- o aplicație care să permită introducerea unei noi rezervări în sistem;
- o aplicație care să permită vizualizarea listei de rezervări.

Menționăm că inițializarea tabelei de utilizatori și cea a sălilor de ședințe se poate face prin intermediul unui script (fără a fi nevoie de interfața grafică pentru administrare). Exemple de date de test sunt furnizate în Anexa 1.

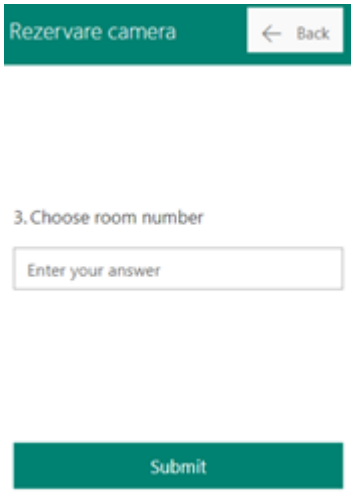
3.1 Aplicație care să permită introducerea unei noi rezervări în sistem

Pagina de login



- utilizatorul va furniza adresa de email;
- în cazul logării cu succes, el va fi redirecționat direct către pagina de creare rezervare;
- altfel, va fi afișat mesajul "Combinatia email/parola nu exista".

Pagina de alegere cameră

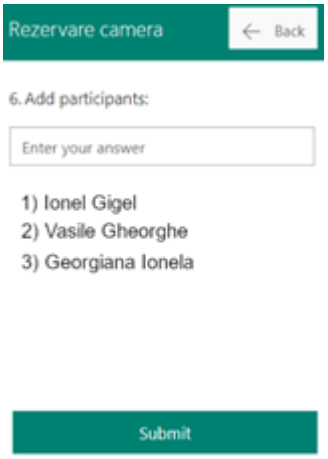


- utilizatorul va putea selecta o cameră de ședință deja introdusă în sistem;
- în cazul în care avem multe camere de ședințe introduse în sistem, atunci este bine să avem un "live search" în care aplicația să afișeze doar camerele care sunt conform pattern-ului introdus de utilizator (de exemplu, dacă utilizatorul introduce 'PIT', sistemul va propune toate sălile de sedințe ce conțin cuvântul PIT: VR PIT 5 8 I, CR PIT 5 6 I, CR PIT 5 6 II etc.);

Pagina de alegere a perioadei rezervării

- utilizatorul trebuie să selecteze data de început și de final ale rezervării;
- dacă sala respectivă este deja rezervată în perioada respectivă, atunci aplicația va semnaliza acest lucru printr-un mesaj: "Există deja o rezervare pentru această perioada (de la: 2019.11.13 14:00 la 2019.11.13 18:00) efectuată de Gigel Ion").

Pagina de selectare a participanților



- utilizatorul va putea sa selecteze participanți la ședință, însă nu este obligatoriu să facă acest lucru;
- după ce se apasă butonul Submit, utilizatorul va fi redirecționat către pagina care afișează detaliile ședinței.

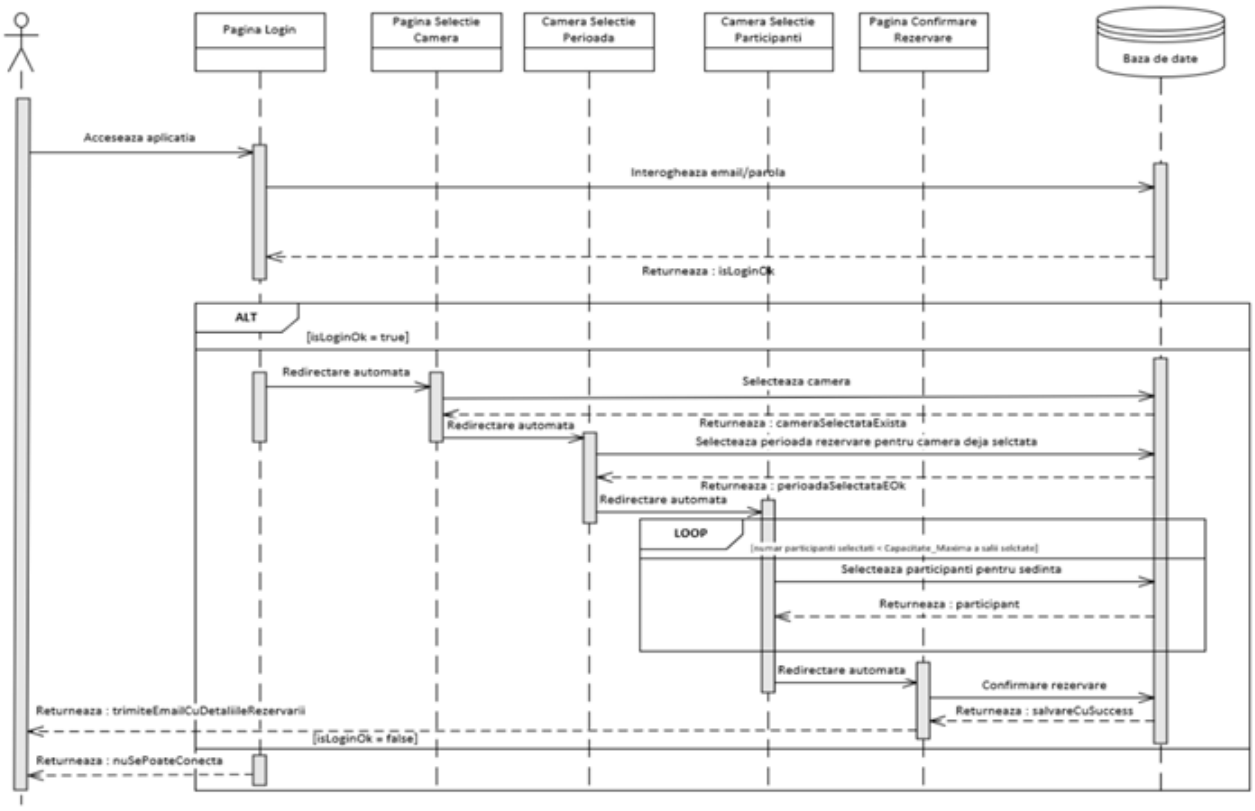
Pagina de confirmare a ședinței

- utilizatorul poate verifica detaliile rezervării, conform imaginii din stânga;
- în cazul în care vrea sa modifice detaliile, poate folosi butonul Back, succesiv, până ajunge la pagina cu detaliile dorite;
- în cazul în care apasă Submit, rezervarea este efectuată în baza de date, iar un email de informare va fi direcționat către Organizator dar și către Participanți.

Utilizatorul va fi capabil să se întoarcă la pagina anterioară de fiecare dată apăsând butonul Back. Informațiile selectate și introduse pe pagină vor fi salvate, astfel încât în momentul reintoarcerii pe o pagină, utilizatorul va vedea datele introduse anterior. De exemplu, utilizatorul tocmai a selectat 3 participanți, Ion, Gigel și Vasile, dar își dă seama că are nevoie de o altă cameră de ședință. Va apăsa butonul Back până la pagina de selecție a camerei de ședințe. Apoi va putea să schimbe camera cu alta. După ce apasă butonul Submit va putea să vizualizeze intervalul orar deja selectat pentru ședință. De asemenea, va putea să schimbe acest interval. După Submit, va putea să acceseze din nou participanții selectați anterior pe pagina de selecție a participanților.

Diagrama de secvențe UML

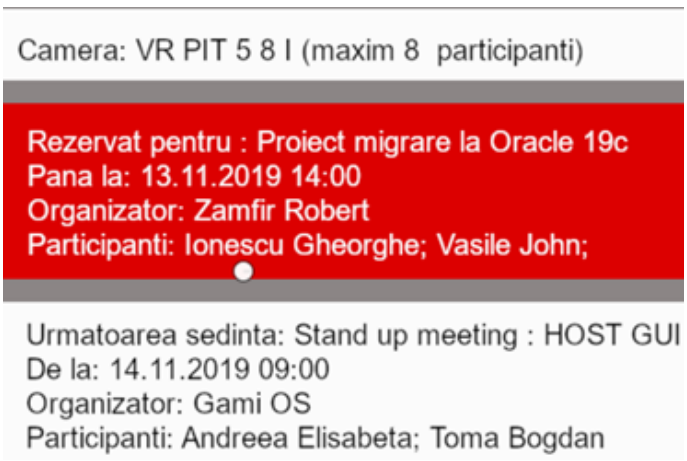
În continuare avem reprezentarea în standard UML pentru stările prin care poate trece aplicația:



3.2 Aplicație care să permită vizualizarea rezervărilor unei camere de ședințe

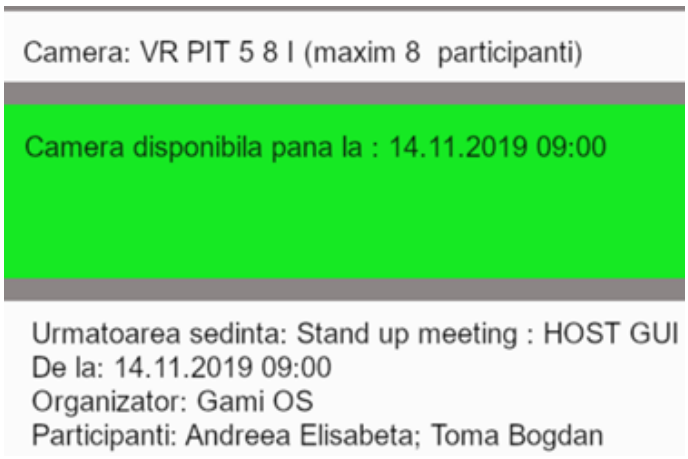
Pentru a folosi într-un mod cât mai util acest sistem de rezervări, fiecare sală de ședințe va avea o tabletă la intrare care va afișa detalii despre rezervarea curentă și rezervările ulterioare. Aplicația va trebui să reîmprospateze date la fiecare minut. De asemenea, selecția camerei pentru care se face afișarea să fie făcută o singură dată, în momentul instalării aplicației.

Pagina de afișare rezervare curentă - rezervare în curs


Camera: VR PIT 5 8 I (maxim 8 participanti)
Rezervat pentru : Proiect migrare la Oracle 19c
Pana la: 13.11.2019 14:00
Organizator: Zamfir Robert
Participanti: Ionescu Gheorghe; Vasile John;
Urmatoarea sedinta: Stand up meeting : HOST GUI
De la: 14.11.2019 09:00
Organizator: Gami OS
Participanti: Andreea Elisabeta; Toma Bogdan

- afișează în partea de sus numele sălii de ședințe și numărul maxim de participanți;
- la mijloc, se vor afișa, pe un background rosu: descrierea rezervării, până când durează rezervarea, organizatorul și participanții la ședință;
- în partea de jos se vor afișa informații (aceleași detalii ca mai sus) despre următoarea ședință programată, iar dacă nu există altă rezervare, nu se va afișa nimic.

Pagina de afișare rezervare curentă - fără rezervare în curs


Camera: VR PIT 5 8 I (maxim 8 participanti)
Camera disponibila pana la : 14.11.2019 09:00
Urmatoarea sedinta: Stand up meeting : HOST GUI
De la: 14.11.2019 09:00
Organizator: Gami OS
Participanti: Andreea Elisabeta; Toma Bogdan

- afișează în partea de sus numele sălii de ședințe și numărul maxim de participanți;
- la mijloc, se vor afișa, pe un background verde până când este disponibilă camera; în cazul în care nu există rezervări, se va afișa doar mesajul "Camera disponibila";
- în partea de jos se vor afișa informații despre următoarea ședință programată: descrierea rezervării, până când durează rezervarea, organizatorul, participanții la ședință;
- nu se va afișa nimic dacă nu există altă rezervare.

4 Cerințe tehnice

- Sistemul realizat poate fi dezvoltat în orice technologie. Pentru a doua aplicație, cea care va afișa continuu date despre sala de ședințe, este indicat folosirea unei technologii compatibile cu dispozitive mobile: Android, Angular, aplicatii web ce pot rula pe orice dispozitiv ce dispune de browser.
- Bazele de date pot fi sisteme de gestiune a datelor (Oracle, mySql etc.) sau pot fi simple fisiere text, xml, json, ș.a.m.d. În al doilea caz, integritatea datelor și a relațiilor va trebui asigurată în interiorul aplicației de rezervări.

5 Anexa 1

- Camere de ședințe:

Id	Nume	Adresa	Capacitate_Maxima
1	VR PIT 5 8 II	Pitesti	5
2	VR PIT 5 8 I	Pitesti	6
3	CR PIT 5 8 III	Pitesti	3
4	VR PIT 5 6 I	Pitesti	2
5	VR TEM 5 6 II	Timisoara	1
6	VR PIT 2 1 I	Pitesti	2

- Utilizatori:

Id	Nume	Email	Este_Organizator
1402478	Gaman Mihai	mihai.gaman@draexlmaier.com	TRUE
1402479	Ionescu Gheorghe	abu.1@yahoo.com	TRUE
1402480	Popescu Ghita	gita.pope@gmail.com	TRUE
1402481	Mihaela Berta	gigi.miky@email.ro	TRUE

RUBRICA DE ROBOTICĂ

Repetarea operațiilor unui robot Mindstorms Education EV3

Doru Anastasiu Popescu [1]

Introducere

În mediul de programare Mindstorms EV3 grupul Flow Control (figura 1) conține blocul Loop, care ne permite să repetăm unul sau mai multe blocuri.

Fig. 1: Grupul Flow Control

Condiția de oprire a execuției blocurilor din corpul blocului Loop poate conține informații de la senzori sau expresii logice. Blocul Loop se termină (figura 2) conform cu modul de configurare True, respectiv False în zona de setare.

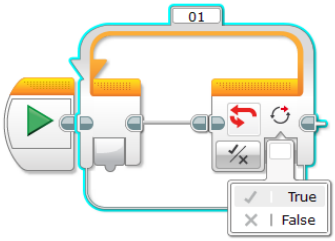


Fig. 2: Blocul Loop

Problemă rezolvată

Pentru a pune în evidență modul de repetare a operațiilor pe care le poate face un robot Minstorms EV3 prezentăm aplicația 1.

Aplicația 1. *Trebuie sa realizăm un proiect pentru un concurs, care prin intermediul robotului să numere câte discuri de culori diferite de alb (culoarea planșei) se găsesc pe o linie dreaptă de lungime L cm. L este un număr natural de două cifre generat aleator. În regulamentul concursului este precizat faptul că robotul poate poarcurge distanța o singură dată.*

[1]Conf. univ. dr., Universitatea din Pitești, dopopan@yahoo.com

Soluție. Vom scrie partea cea mai complicată a proiectului, după care vom trece la copierea unei porțiuni din program și lipirea ei de mai multe ori, ca să acopere toată distanța cea mai lungă (99 cm) ce poate să apară. În program se folosesc următoarele variabile: L pentru lungimea traseului (generată aleator, ca să verifice programul în mai multe situații), *rot* pentru numărul de rotații corespunzătoare distanței L, k numărul de rotații până la un moment dat, Nr numărul de buline de culoare diferită de alb întâlnite pe traseu. La o rotație se parcurg aproximativ 18 cm (valoare memorată într-o constantă) dacă se folosesc roți de diametrul 5,5 cm. În program se vor introduce și două blocuri *Switch*, primul pentru a verifica cu senzorul de culoare, dacă se întâlnește o bulină colorată, iar al doilea pentru a verifica dacă numărul de rotații până la un moment dat, nu depășește valoarea lui *rot*.

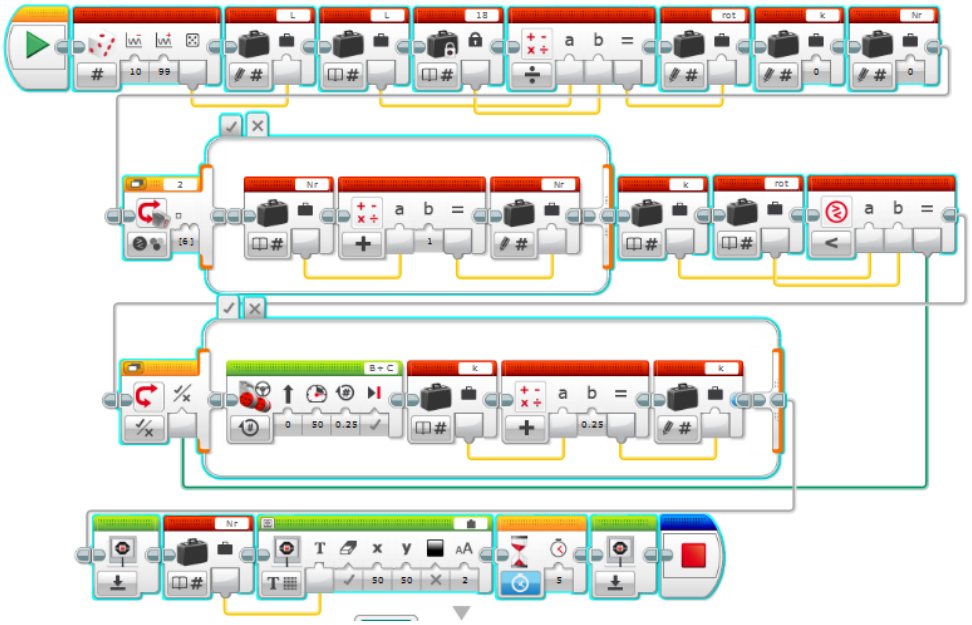


Fig. 3: Programul de numărare a discurilor fără bloc de repetare

Pentru că trebuie să parcurgem cel mult 99 cm, atunci blocurile ar trebui repetate de 99/0.25 ori. Se poate micșora acest număr dacă se înlocuiește în blocul Move Steering valoarea 0.25 cu o valoare mai mare, dar există riscul să nu mai numere toate bulinele. Acest lucru poate fi evitat folosind blocul *Loop* (care are ca efect repetarea execuției șirului de blocuri din interiorul său până când o anumită expresie logică este adevărată).

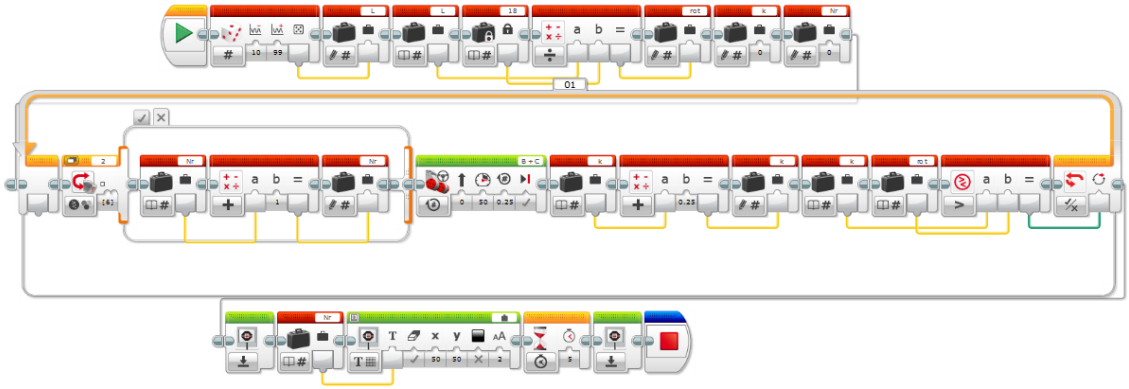


Fig. 4: Programul de numărare a discurilor cu bloc de repetare (Loop)

Probleme propuse

Pentru fiecare din problemele următoare scrieți câte un proiect folosind mediul interactiv de programare Mindstorm Evolution EV3.

1. Se dă un traseu în formă dreptunghiulară (figura 5) cu laturile de lungime a și b (unitatea de măsură este centimetrul, $1 \leq a,b \leq 60$). Deplasați robotul pe acest traseu pornind dintr-un colț și avertizați sonor când numărul de rotații este par. Se va folosi sunetul unei culori (exemplu: *red* – roșu).

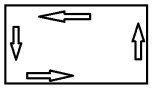


Fig. 5: Traseu dreptunghiular cu sensul de deplasare precizat

2. Pe o planșă se află un cub și la o distanță de cel mult 50 cm de acesta un robot. Deplasați robotul până la cel puțin 7 cm de cub și afișați pe ecran distanța parcursă. Afișarea se va păstra pe o perioadă de 5 secunde.
3. Simulați modul de parcare a unei mașini folosind un robot. Proiectați o parcare cu trei locuri pe partea dreaptă (figura 6). Plasați aleator în două din locuri cuburi ce reprezintă mașini staționate de culori verde și galben și deplasați robotul astfel încât să se așeze în locul liber, fără să atingă cuburile.

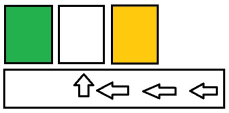


Fig. 6: Parcare cu specificarea locului de parcare

Bibliografie

[1] D.A. Popescu, *Programarea roboților LEGO folosind mediul Mindstorms EV3*, MATINF, nr. 1, 2018.

[2] D.A. Popescu, *Programarea roboților Lego folosind structura alternativă în mediul grafic interactiv Mindstorms Education EV3*, MATINF, nr. 2, 2018.

[3] D.A. Popescu, S. Profeanu, S. Dobrescu, *Manual de informatică pentru clasa a V-a*, Editura CD-Press, 2017.

[4] *Minsdtorms EV3 – Ghid de Utilizare*, LEGO Group, 2013.

[5] L. Negrescu, L. Negrescu, *Construirea și programarea roboților LEGO Mindstorms EV3*, Editura Albastră, 2015.

[6] J. Olayvar, E. Lindberg, *LEGO Mindstorms EV3 Programming Basics*, Washington State Library, 2016.

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Evaluare Națională

Testul 1

Adrian Ţurcanu[1]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Cel mai mic multiplu comun al numerelor 125 şi 200 este:
   a) 1; b) 25000; c) 1000; d) 500.
2. Suma numerelor de forma $\overline{2aa}$ divizibile cu 5 este:
   a) 200; b) 255; c) 455; d) 901.
3. Suma celor mai mici 25 de numere naturale nenule distincte este:
   a) 300; b) 325; c) 351; d) 378.
4. Un produs costă 120 lei. După o scumpire cu 20% preţul produsului va fi:
   a) 122 lei; b) 134 lei; c) 140 lei; d) 144 lei.
5. Notele obţinute de elevii unei clase la teza la matematică sunt date în tabelul de mai jos:

Nota	5	6	7	8	9	10
Nr. elevi	3	4	7	5	3	3

   Media notelor obţinute de elevii clasei la această teză este:
   a) 7,5; b) 7,4; c) 7,2; d) 7.
6. Temperatura minimă în dimineaţa zilei de joi a fost $-4°$ C, iar temperatura minimă în dimineaţa zilei de vineri a fost $+2°$ C. Mihai afirmă vineri: ,,Temperatura minimă de astăzi a fost cu $6°$ C mai mare decât temperatura minimă de ieri". Cum este afirmaţia lui Mihai?
   a) adevărat;
   b) fals;

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Fie punctele A, B, C, D coliniare, în această ordine, astfel încât $BC = 2AB$ şi $CD = 3AB$. Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
   a) C este simetricul lui A faţă de B;
   b) D este simetricul lui B faţă de C;
   c) B este mijlocul segmentului AC;
   d) C este mijlocul segmentului AD.
2. Într-un trapez, suma lungimilor bazelor este de 30 cm, iar lungimea înălţimii reprezintă 60% din lungimea liniei mijlocii. Aria trapezului este:

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, adrianturcanu85@yahoo.com

a) 270 cm^2; b) 135 cm^2; c) 540 cm^2; d) 39 cm^2.

3. Un loc de joacă de formă circulară cu raza de 12 m se împrejmuieşte cu două rânduri de plasă de sârmă. Un sul de plasă de sârmă are lungimea de 25 metri liniari. Care este numărul minim de suluri necesare pentru împrejmuire?

a) 3; b) 4; c) 6; d) 7.

4. În triunghiul dreptunghic ABC, $\sphericalangle A = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC$, $BD = 18$ cm şi $DC = 8$ cm. Aria triunghiului ABC este egală cu:

a) 19 cm^2; b) 144 cm^2; c) 156 cm^2; d) 312 cm^2.

5. Apotema unei piramide patrulatere regulate cu latura bazei de 12 cm formează un unghi de 60° cu planul bazei. Volumul piramidei este:

a) $864\sqrt{3}$ cm^3; b) $288\sqrt{3}$ cm^3; c) $144\sqrt{3}$ cm^3; d) $72\sqrt{3}$ cm^3.

6. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile 18 cm, 4 cm şi respectiv 3 cm. Care este suma lungimilor laturilor unui cub care are volumul egal cu volumul paralelipedului?

a) 48; b) $72\sqrt{6}$; c) $48\sqrt{6}$; d) 72.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Dintre cei 25 de elevi ai unei clase, 11 au participat la o competiţie de tenis de masă şi 16 la o competiţie de badminton. Ştiind că doi dintre elevi nu au paricipat la niciuna dintre cele două competiţii, aflaţi:
   a) Câţi elevi au participat la ambele competiţii?
   b) Câţi elevi au participat doar la competiţia de tenis de masă?
2. Fie expresia $E(x, y) = x^2 + y^2 - xy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
   a) Calculaţi $E(2, -3)$.
   b) Determinaţi numărul real pozitiv a astfel încât $E(a, -a) = 48$.
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, $a \in \mathbb{R}$.
   a) Determinaţi a astfel încât punctul $A(-1, 3)$ să aparţină graficului funcţiei f.
   b) Pentru $a = 5$, calculaţi suma $S = f(1) + f(2) + ... + f(10)$.
4. În triunghiul ABC, M este mijlocul laturii BC şi aria triunghiului ABM este $7,5$ cm^2.
   a) Calculaţi aria triunghiului ABC.
   b) Ştiind că distanţa de la A la BC reprezintă 30% din lungimea laturii BC, determinaţi lungimea laturii BC.
5. L şi l, lungimea şi respectiv lăţimea unui dreptunghi, sunt invers proporţionale cu $0,(1)$ şi respectiv $0,1(6)$.
   a) Arătaţi că $2L = 3l$.
   b) Ştiind că perimetrul dreptunghiului este egal cu 120 cm, determinaţi aria acestuia.
6. Un tub de tablă de forma unui cilindru circular drept se confecţionează prin rularea unei foi de tablă de formă pătrată cu perimetrul de 12 m, fără pierderi de material.
   a) Arătaţi că înălţimea tubului este de 3 m.
   b) Arătaţi că raza bazei tubului este mai mică de 50 cm.

Testul 2

Costel Anghel[2] *și Florea Badea*[3]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $7 \cdot 10 - 100 : (2 \cdot 5)$ este egal cu:
   a) 40; b) 60; c) 30; d) 90.
2. Într-o zi, temperatura aerului înregistrată dimineața era de $-7°$ C. În aceeași zi, temperatura măsurată la prânz era de $+12°$ C. Temperatura măsurată, în acea zi, la prânz era mai mare decât cea măsurată dimineața cu:
   a) 5° C; b) 8° C; c) 18° C; d) 19° C.
3. Dintre seturile de numere de mai jos, cel scris în ordine crescătoare este:
   a) 5,12; 5,1(2); 5,(12); 5,122; c) 5,12; 5,(12); 5,122; 5,1(2);
   b) 5,1(2); 5,122; 5,(12); 5,12; d) 5,122; 5,12; 5,(12); 5,1(2).
4. Suma dintre cel mai mare număr întreg și cel mai mic număr natural din intervalul $[-3, 15)$ este:
   a) 13; b) 15; c) 14; d) 9.
5. Dacă $\frac{x+3}{16} = \frac{5}{8}$, atunci x este egal cu:
   a) 6; b) 7; c) 4; d) 11.
6. Media aritmetică a numerelor $9\sqrt{2}$, $5\sqrt{2}$, $-29\sqrt{2}$ este:
   a) $-5\sqrt{2}$; b) $5\sqrt{2}$; c) $8\sqrt{2}$; d) $-4\sqrt{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Punctele A și B sunt simetrice față de punctul C. Dacă $AC = 7,5$ cm atunci distanța dintre punctele A și B este egală cu:
   a) 14 cm; b) 1,5 dm; c) 20 cm; d) 1,45 dm.
2. Dacă două unghiuri adiacente sunt complementare atunci măsura unghiului format de bisectoarele lor este egală cu:
   a) 40°; b) 38°; c) 46°; d) 45°.
3. Un triunghi are măsurile unghiurilor direct proporționale cu numerele 9, 5 și 6. Măsura unghiului mai mare este egală cu:
   a) 83°; b) 80°; c) 81°; d) 72°.
4. Se consideră trapezul dreptunghic $ABCD$, $m(\sphericalangle A) = m(\sphericalangle D) = 90°$, $AB||CD||MN$, unde $M \in (AD)$ și $N \in (BC)$. Diagonala (AC) intersectează dreapta MN în punctul P. Dacă $\triangle CNP$ este echilateral și $AD = 4$ cm atunci aria trapezului este egală cu:
   a) $8\sqrt{3}$ cm^2; b) $6\sqrt{3}$ cm^2; c) $8\sqrt{2}$ cm^2; d) $9\sqrt{6}$ cm^2.
5. Coarda $[AB]$ subîntinde un arc de cerc de $120°$ în cercul $\mathcal{C}(O; 7\sqrt{2})$. Paralela prin A la OB intersectează a doua oară cercul în punctul C. Aria patrulaterului $AOBC$ este egală cu:

[2] Profesor, Colegiul Național „Ion Minulescu”, Slatina, anghelcostel2012@yahoo.com
[3] Profesor, Şcoala Gimnazială „Nicolae Coculescu”, Scornicești

a) 49 cm^2; b) $49\sqrt{3}$ cm^2; c) $49\sqrt{2}$ cm^2; d) 50 cm^2.

6. În cubul $ABCDEFGH$, punctele M și N reprezintă mijlocul muchiei $[CD]$ respectiv centru feței $ADHE$. Dacă aria triunghiului AMN este egală cu $\frac{9\sqrt{6}}{2}$ cm^2 atunci volumul cubului este egal cu:

a) 216 cm^3; b) $81\sqrt{3}$ cm^3; c) 343 cm^3; d) $162\sqrt{6}$ cm^3.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. După o reducere cu 8% din preț, un televizor costă 1472 lei.
   a) Aflați prețul televizorului înainte de reducere.
   b) Aflați cel mai mic număr natural p, astfel încât, dacă reducerea de preț ar fi fost cu p%, atunci prețul televizorului ar fi scăzut sub 1000 lei.
2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{1+x}{2x} - \frac{1+2x}{5x}\right) \cdot \frac{50x}{x+3}$, $x \neq 0$ și $x \neq -3$.
   a) Arătați că $E(10) \in \mathbb{N}$.
   b) Demonstrați că $E(x)$ este constantă, oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0; -3\}$.
3. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 2$ și $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -2x + 3$.
   a) Determinați coordonatele punctului de intersecție dintre graficele celor două funcții.
   b) Calculați $f(1) + f(2) + ... + f(100) + 2 \cdot [g(1) + g(2) + ... + g(100)]$.
4. În triunghiul MNP, $MP = 12$ cm, $PN = 9$ cm, $m(\sphericalangle MPN) = 60°$ și $[MA]$ înălțime, $A \in (NP)$. Se construiește dreptunghiul $AMBN$.
   a) Calculați perimetrul dreptunghiului $AMBN$.
   b) Calculați sinusul unghiului $\sphericalangle BPM$.
5. În paralelipipedul dreptunghic $ABCDMNPQ$, $AB = 15$ cm, $BC = 10$ cm și $AM = 12$ cm.
   a) Aflați volumul paralelipipedului.
   b) Determinați poziția punctului S pe muchia (CP) astfel încât perimetrul triunghiului BSQ să fie minim.
6. Se consideră cubul $ABCDEFGH$ și punctele $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (FG)$, $Q \in (EF)$ astfel încât $AM = CN = EQ = GP = \frac{1}{3} \cdot AB$. Ştiind că aria patrulaterului $MNPQ$ este egală cu $54\sqrt{2}$ cm^2 se cer:
   a) Aria secțiunii diagonale a cubului.
   b) Distanța de la punctul A la planul (MNP).

Testul 3

Ana Maria Iordache[4]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Dacă $n \in \mathbb{Z}$ și $\sqrt{\frac{4}{3}^{-2} : 9} - \sqrt{0,0025} \in (n-1, n)$, atunci numărul n este:

a) 1; b) 5; c) 0; d) $\frac{1}{5}$.

2. Se consideră un pătrat cu latura de 60 cm. Atunci 5% din dublul ariei pătratului este:

[4] Profesor, Liceul Tehnologic „Virgil Madgearu”, Roșiorii de Vede, anamariayord@yahoo.com

a) 36; b) 7200; c) 360; d) 72 C.

3. Două unghiuri exterioare ale unui triunghi sunt direct proporționale cu 2 și 3, iar suma lor este 270°. Atunci triunghiul este:

   a) isoscel; b) echilateral; c) dreptunghic; d) obtuzunghic.

4. Perimetrul unui hexagon regulat cu latura de 10 cm este:

   a) 30 cm; b) 60 cm; c) 106 cm; d) 600 cm.

5. În tabelul de mai jos sunt precizate valorile temperaturilor înregistrate la ora 8 A.M. într-o săptămână a lunii februarie.

Ziua	I	II	III	IV	V	VI	VII
Punctaj	1	-2	-4	-3	1	1	0

   Valoarea absolută a celei mai mici temperaturi înregistrată este:

   a) -4; b) 4; c) 0; d) 2.

6. A doua zecimală a numărului $\sqrt{1,6}$ este:

   a) 6; b) 2; c) 1; d) 4.

SUBIECTUL al II-lea

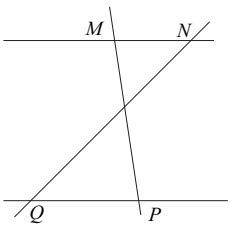
Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Un ornament de brad are forma unei piramide triunghiulare regulate. Numărul vârfurilor piramidei este:

   a) 3; b) 4; c) 5; d) 1.

2. În figura alăturată dreptele MN și PQ sunt paralele. Măsura $\sphericalangle MNQ = 40°$ iar măsura $\sphericalangle MPQ = 80°$. Atunci măsura $\sphericalangle MON$ este:

   a) 60°; c) 90°;
   b) 120°; d) 30°.



3. Dreptunghiul $ABCD$ reprezintă o zonă cu flori albastre având perimetrul egal cu 14 m, în care lățimea reprezintă 40% din lungimea dreptunghiului $ABCD$. Atunci aria dreptunghiului este egală cu:

   a) 10 cm^2; b) 5 cm^2; c) 7 cm^2; d) 14 cm^2.

4. Se consideră cercul de centru O și rază 25 cm. Fie A, B două puncte situate pe cerc astfel încât $AB = 30$ cm. Atunci distanța de la centrul cercului la coarda AB este:

   a) 20 cm; b) 400 cm; c) 40 cm; d) 10 cm.

5. Rezultatul calculului $\cos 30° + \sin 30° - \sin 60° - \cos 60°$ este:

   a) 0; b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

6. În triunghiul ABC, dreptunghic în A, înălțimea AD, $D \in (BC)$ este egală cu 12 cm. Dacă $\frac{DB}{DC} = \frac{9}{16}$, atunci aria triunghiului ABC este:

   a) 300 cm^2; b) 60 cm^2; c) 25 cm^2; d) 150 cm^2.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Numerele reale x și y au raportul 5 și diferența 16.

a) Determinați media aritmetică a numerelor x și y.
b) Dacă x și y sunt catetele unui triunghi dreptunghic aflați aria acestuia.

2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{x+1}{x^2+x-6} + \frac{1}{2-x} + \frac{6}{x+3}\right) : \frac{x+35}{x+3}$.

a) Aflați mulțimea V pentru care este definită expresia $E(x)$.
b) Aduceți expresia la forma cea mai simplă.

3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x - 3f(1)$.

a) Determinați $f(x)$.
b) Rezolvați în $\mathbb{Z}$ inecuația: $2f(x) + 3f(2x) \geq -20$.

4. Un pătrat și un dreptunghi au același perimetru. Dacă lungimea dreptunghiului este de 10 cm și aria pătratului este de 64 cm^2, atunci:

a) Calculați latura pătratului.
b) Calculați aria dreptunghiului.

5. În paralelogramul $ABCD$ se cunosc $AD = 10$ cm, $AB = 14$ cm și $m(\sphericalangle B) = 120°$.

a) Aflați lungimea diagonalei AC.
b) Dacă E este punctul de intersecție al bisectoarei unghiului $\sphericalangle ADC$ cu AC, calculați $EC^2 - AE^2$.

6. Un teren de joacă are forma unui pătrat $ABCD$ cu latura de 20 cm. În mijlocul M al laturii AB este montat un stâlp de iluminat MP cu lungimea de 12 cm.

a) Aflați distanța de la P la latura terenului.
b) Determinați $\sin \sphericalangle((PAB), (PDC))$.

Testul 4

Dragoș Drăgușin[5]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $1,2 - 0,2 \cdot 10$ este:

a) 0,8; b) 10; c) -0,8; d) $\frac{1}{2}$.

2. Se consideră numărul $n = |x - 2y + 1|$. Valoarea lui n pentru $x = -2$ și $y = 3$ este:

a) 7; b) -7; c) 3; d) -3.

3. Un televizor costă 1990 lei. După o ieftinire cu 10% prețul televizorului devine:

a) 1900; b) 1791; c) 1791,2; d) 199.

4. Un robinet umple un bazin în 9 ore. Timpul în care umplu bazinul 3 robinete cu același debit ca și primul este:

a) 27; b) 6; c) 3; d) 1.

5. Fie numerele $a = |\sqrt{2} - 2|$ și $b = \sqrt{(2+\sqrt{2})^2}$. Suma dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor a și b este:

a) 4; b) $2 + \sqrt{2}$; c) $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$; d) 8.

6. Fie intervalul $A = (-3; 2]$ și mulțimea $B = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 1,7; \frac{3}{2}\}$. Cel mai mare element din $A \cap B$ este:

[5] Profesor, Liceul Tehnologic „Regele Mihai I", Curtea de Argeș, dragusin_dragos@yahoo.com

a) $\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{3}$; c) 1,7; d) $\frac{3}{2}$.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Se consideră două drepte concurente AB și CD, cu $AB \cap CD = \{O\}$, $OB = OA = 4$ cm, $OD = OC = 5$ cm și $m(\sphericalangle AOD) = 45°$. Patrulaterul $ABCD$ este:
   a) pătrat; c) dreptunghi;
   b) romb; d) paralelogram.
2. Se consideră unghiul $\sphericalangle AOC$ adiacent cu unghiul $\sphericalangle EOC$, $[OB$ și $[OD$ bisectoarele unghiurilor $\sphericalangle AOC$, respectiv $\sphericalangle EOC$. Ştiind că $m(\sphericalangle AOD) = 120°$ și $m(\sphericalangle BOE) = 90°$, măsura unghiului $\sphericalangle BOD$ este:
   a) 100°; b) 120°; c) 70°; d) 30°.
3. Se consideră punctele A și B pe un cerc de centru O astfel încât $m(\sphericalangle AOB) = 80°$, iar punctul $C \in \overset{\frown}{AB}$ (arcul mare $\overset{\frown}{AB}$). Măsura unghiului $\sphericalangle ACB$ este:
   a) 80°; b) 40°; c) 160°; d) 180°.
4. Se consideră punctele necoliniare A, B și C astfel încât $m(\sphericalangle BAC) = 90°$, $AB = 4$ cm și $AC = 3$ cm. Distanța de la A la BC este:
   a) 2,4 cm; b) 5 cm; c) 12 cm; d) 6 cm.
5. Perimetrul unui romb cu diagonalele egale cu 12 cm și 16 cm este:
   a) 40 cm; b) 40 dm; c) 20 cm; d) 30 cm.
6. Cantitatea de apă care se revarsă dintr-un recipient la scufundarea în acesta a unei pietre cubice cu dimensiunea de 3 cm este:
   a) 9 ml; b) 27 ml; c) 9 l; d) 27 l.

SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. La un test de admitere cu 30 de întrebări se acordă 4 puncte pentru un răspuns corect și se scad 2 puncte pentru un răspuns greșit. Pentru a fi admis, un elev trebuie să aibă un punctaj de minim 100 de puncte.
   a) Dacă Ionel a greșit la 4 întrebări, este declarat admis? Justificați răspunsul.
   b) Care este numărul minim de răspunsuri corecte pentru a fi admis?
2. Se consideră expresia $E(x) = \left(\frac{3}{x-2} - \frac{2}{2+x} - \frac{10}{x^2-4}\right) \cdot \frac{x^2-4x+4}{x}$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 2\}$.
   a) Arătați că $E(x) = \frac{x-2}{x+2}$.
   b) Determinați valorile întregi ale lui x pentru care $E(x) \in \mathbb{Z}$.
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x + 2$.
   a) Determinați aria triunghiului format de graficul funcției cu axele de coordonate Ox și Oy.
   b) Aflați punctul de pe graficul funcției care are abscisa egală cu dublul ordonatei.
4. Trapezul isoscel $ABCD$ cu $AB||CD$ are $[AB] \equiv [DC] \equiv [BC]$, $AD = 18$ cm și $m(\sphericalangle ACD) = 30°$.
   a) Arătați că $AC \perp BC$.
   b) Aflați aria trapezului $ABCD$.
5. Fie triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB = 8$ cm și $AC = 6$ cm. Se consideră punctul $N \in (AB)$, $AN = 3$ cm și $M \in (AC)$ astfel încât $\sphericalangle MNA \equiv \sphericalangle BCA$.

a) Arătați că distanța de la N la BC este egală cu AN.
b) Aflați aria patrulaterului $BNMC$.

6. O prismă dreaptă $ABCDA'B'C'D'$ are bazele pătrate cu $AB = 12$ cm și $AB' = 13$ cm.
   a) Aflați tangenta unghiului format de dreapta $B'O$ cu planul (ABC) unde O este punctul de intersecție al diagonalelor prismei.
   b) Aflați volumul piramidei $OABCD$.

Testul 5

Elena Țițescu[6]

SUBIECTUL I

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Rezultatul calculului $15 - 5 : (1 + 4)$ este:
   a) 2; b) 14; c) 10; d) 5.
2. O păpușă costă 25 lei. După o reducere cu 20%, prețul păpușii va fi:
   a) 20 lei; b) 30 lei; c) 15 lei; d) 25 lei.
3. În tabelul de mai jos sunt prezentate temperaturile medii ale celor trei luni de iarnă:

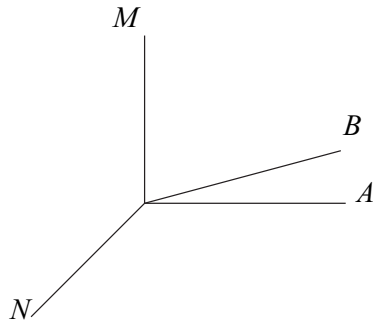
Decembrie	Ianuarie	Februarie
-8	-12	3

   Conform tabelului diferența dintre temperatura maximă și cea minimă este de:
   a) 9° C; b) 11° C; c) $-15°$ C; d) 15° C.
4. Media aritmetică a numerelor 15, 10 și 17 este:
   a) 42; b) 14; c) 16; d) 14.
5. Inversul numărului $a = 0,2 + 0,(3)$ este egal cu:
   a) $\frac{8}{5}$; b) $\frac{5}{8}$; c) $\frac{8}{15}$; d) $\frac{15}{8}$.

SUBIECTUL al II-lea

Încercuiește litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. În figura alăturată, măsura unghiul $\sphericalangle AOB$ este egală cu 50°, $MO \perp OA$, iar punctele B, O, N sunt coliniare. Măsura unghiului $\sphericalangle MON$ este:
   a) 140°;
   b) 120°;
   c) 110°;
   d) 130°.

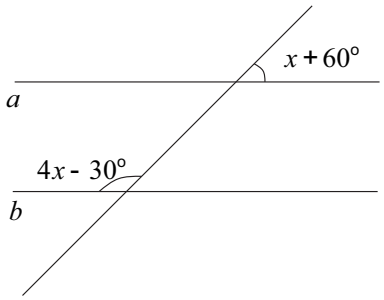


2. Un unghi are măsura egală cu $48°40'$. Măsura complementului său este de:

[6] Profesor, Şcoala Gimnazială „Naum Râmniceanu”, Corbi, amalia_elena19@yahoo.com

a) $39°40'$; b) $41°20'$; c) $131°30'$; d) $131°20'$.

3. În figura alăturată dreptele a și b sunt paralele, iar c este o secantă. Valoarea lui x este:



a) $20°$;
b) $30°$;
c) $40°$;
d) $50°$.

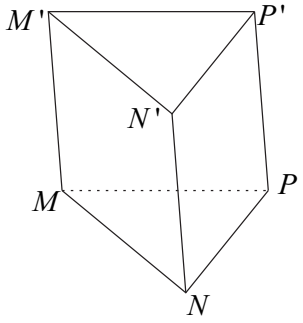
4. În figura alăturată este reprezentată o placă de faianță în formă de pătrat $ABCD$ cu diagonala $AC = 6\sqrt{2}$ cm. Aria plăcii de faianță este:

a) 36 cm^2; b) 72 cm^2; c) 12 cm^2; d) 24 cm^2.

5. Un cerc are raza cu lungimea de 10 cm. Raportul dintre lungimea cercului și diametrul acestuia este de:

a) $2\ \pi$; b) 2; c) π; d) 1.

6. În figura alăturată este reprezentată o prismă triunghiulară regulată dreaptă $MNPM'N'P'$ cu $MN = 8$ cm și $MM' = 4$ cm. Măsura unghiului dintre planele $(M'NP)$ și (MNP) este:

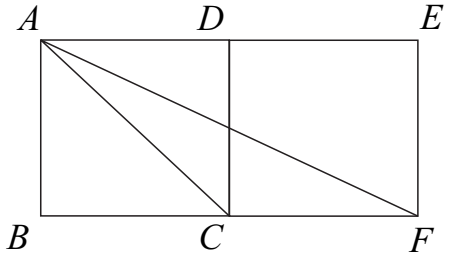


a) $30°$;
b) $45°$;
c) $60°$;
d) $90°$.

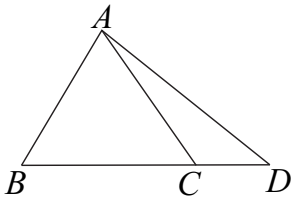
SUBIECTUL al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1. Mama și fiica au împreună 55 de ani, iar raportul vârstelor lor este de $\frac{9}{2}$.
   a) Aflați vârsta fiicei.
   b) Peste câți ani vârsta mamei va fi dublul vârstei fiicei?
2. Se consideră expresia $E(x) = \frac{2x+1}{x-1} : \left(1 - \frac{3x^2}{1-x^2}\right)$, unde $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.
   a) Arătați că $E(x) = \frac{x+1}{2x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.
   b) Rezolvați ecuația $E(x) = 2$.
3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + 2$. Punctul $A(2, 8)$ este situat pe graficul funcției f.
   a) Arătați că $a = 3$.
   b) Determinați punctul B de pe graficul funcției care are coordonatele egale.
4. În figura alăturată sunt reprezentate două pătrate, $ABCD$ și $CDEF$ având latura egală cu 12 cm.
   a) Determinați distanța de la punctul C la dreapta AF.
   b) Calculați $\sin(\sphericalangle FAC)$.

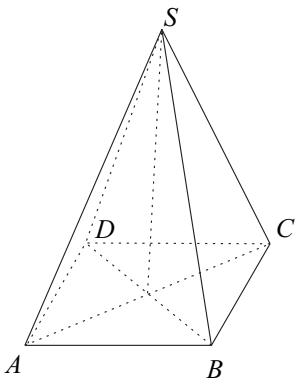


5. În figura alăturată este reprezentat triunghiul echilateral ABC, cu $AB = 12$ cm, iar punctul D aparține prelungirii laturii BC, astfel încât $CD = 6$ cm.



   a) Arătați că $AD = 6\sqrt{7}$ cm.
   b) Demonstrați că aria triunghiului ACD este mai mică decât 32 cm^2.

6. În figura alăturată este reprezentat un cort în formă de piramidă patrulateră regulată dreaptă $SABCD$, cu $AB = 4$ m și $SO = 1,5$ m.



   a) Fețele laterale ale cortului sunt vopsite cu albastru. Aflați suprafața vopsită.
   b) Aflați sinusul unghiului format de o față laterală cu planul bazei.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Marius Macarie[1]

SUBIECTUL I

1. Să se determine rația progresiei geometrice $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ în care
$$\begin{cases} b_2 - b_1 = 2 \\ b_3 - b_1 = -6 \end{cases}$$
2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2mx + m - 1$ se află pe dreapta de ecuație $y = 2x - 1$.
3. Să se rezolve ecuația $\sqrt{4-x} + \sqrt{8+x} = 2\sqrt{3}$.
4. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ care au un număr impar de elemente.
5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\overrightarrow{u} = (m-1)\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = -4\overrightarrow{i} + (m+2)\overrightarrow{j}$ sunt coliniari.
6. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 4$, $AC = 5$, $BC = 7$. Să se calculeze $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x + ay - 2z = 8 \\ 2x + ay + 3z = b \\ 3x + ay + 4z = -2 \end{cases} \text{ și matricea } A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & -2 \\ 2 & a & 3 \\ 3 & a & 4 \end{pmatrix}.$$
   a) Să se arate că $\det A(1) + \det A(2) + \ldots + \det A(10) = 220$.
   b) Pentru $a = 1$ și $b = -1$, să se rezolve sistemul de ecuații.
   c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul de ecuații să fie nu aibe soluții.
2. Fie polinomul $f = (X-1)^{2020} + (X-2)^{2019} + mX^2 + X + 1$ cu rădăcinile $x_k \in \mathbb{C}$, $k = \overline{1, 2020}$ și $m \in \mathbb{R}$.
   a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât f este divizibil cu $g = X - 1$.
   b) Să se arate că $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{2020}^2 = 6057$.
   c) Să se determine restul împărțirii lui f la polinomul $h = X^2 - 3X + 2$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^{2x} - x + 1}{e^{2x}}$.
   a) Calculați $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$.
   b) Să se demonstreze că tangenta la graficul funcției f în punctul $A\left(\frac{3}{2}, f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ este paralelă cu asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.
   c) Să se determine intervalele de convexitate și concavitate ale funcției f.
2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$.
   a) Să se arate că $\displaystyle\int_2^3 \frac{f(x)}{\ln x} dx = \frac{1}{6}$.
   b) Să se arate că orice primitivă a funcției f este convexă pe $(0, \sqrt{e}]$.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

c) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[1,e]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)$.

Testul 2

Monica Dumitrache[2]

SUBIECTUL I

1. Arătați că $\log_2 5\ \cdot \log_5 8\ =3$.
2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x-4$. Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\dfrac{f(x)}{10+f(x)}\geq 0$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x+8\cdot 3^{-x}=9$.
4. Determinați al cincilea termen al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{x}+3x\right)^8$.
5. Se consideră dreapta d de ecuație $2x-4y+1=0$. Scrieți ecuația dreptei care trece prin punctul $A(4,-1)$ și este perpendiculară pe dreapta d.
6. În triunghiul ABC avem $\sin A=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ și $BC=2\sqrt{3}$. Calculați AC.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie determinantul $D(a,b)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & 1\\ a^2 & b^2 & 1\end{vmatrix}$, unde $a,b\in\mathbb{Z}$.
   a) Calculați $D(2,3)$.
   b) Determinați $m\in\mathbb{Z}$ știind că $D(m,3)=-6$.
   c) Demonstrați că numărul $D(a,b)$ este divizibil cu 2, oricare ar fi $a,b\in\mathbb{Z}$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x\otimes y=xy-\dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{2}+\dfrac{3}{4}$.
   a) Arătați că $x\otimes y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$.
   b) Determinați simetricul elementului $x=\dfrac{3}{2}$, în raport cu legea de compoziție „$\otimes$”.
   c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\log_x 2=\dfrac{1}{2}\otimes\dfrac{2}{3}\otimes\dfrac{3}{4}\otimes\cdots\otimes\dfrac{19}{20}$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{e^x}{x}$.
   a) Arătați că $f'(e)=e^{e-1}-e^{e-2}$.
   b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
   c) Demonstrați că $e^x-ex\geq 0$, pentru orice $x\in(0,\ +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f:[1,3]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.
   a) Calculați volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției $g:[1,3]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{1}{x^2}$, în jurul axei Ox.
   b) Calculați $\int\limits_1^3 xf(x)\ln x dx$.
   c) Arătați că orice primitivă a lui f este funcție convexă.

[2] Profesor, Colegiul Economic „Ion Ghica”, Târgoviște, dumitrache_m0nica@yahoo.com

Testul 3

Mihai Florea Dumitrescu[3]

SUBIECTUL I

1. Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ cu rația pozitivă. Știind că $a_3 = 7$ și produsul primilor cinci termeni ai progresiei este egal cu 3640, aflați primul termen al progresiei.
2. Să se determine numărul real m, astfel încât axa Ox este tangentă parabolei $y = x^2+mx+4$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x = \log_4 (x+2)$.
4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor divizibilă cu 4.
5. Aflați numărul real a, pentru care vectorii $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ și $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ sunt perpendiculari.
6. Un triunghi ABC are $BC = 2R$, unde R este raza cercului circumscris $\triangle ABC$, $\sin B = \dfrac{1}{2}$ și aria egală cu $8\sqrt{3}$. Aflați R.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -10 & -2 \end{pmatrix}$.
   a) Calculați $\det(A^2)$.
   b) Aflați perechile de numere întregi (a, b), astfel încât are loc egalitatea $(I_2 + aA) \cdot (I_2 + bA) = I_2 + A$.
   c) Aflați numărul natural n pentru care are loc egalitatea $A + A^2 + A^3 + ... + A^{2020} = \dfrac{3^n - 1}{2} A$.
2. Fie polinomul $f = X^3 + (1-2a)X^2 + (a^2-2a)X + a^2$, unde a este număr real nenul.
   a) Aflați restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.
   b) Pentru $a \in \mathbb{Z}$ aflați rădăcinile polinomului f.
   c) Determinați $a \in \mathbb{R}$, pentru care are are loc egalitatea

$$\frac{x_1 + x_2 + 1}{x_3} + \frac{x_1 + x_3 + 1}{x_2} + \frac{x_3 + x_2 + 1}{x_1} = -1.$$

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln|x-1|$.
   a) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.
   b) Arătați că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 1)$.
   c) Arătați că funcția f este concavă pe intervalul $(1, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n \cdot \sin x$, $n \in \mathbb{N}$.
   a) Calculați $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f_0(x)\,dx$.
   b) Calculați $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f_1(x)\,dx$.
   c) Calculați volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f_1(x)$.

[3] Profesor, Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

Testul 4

Adina-Florina Militaru[4]

SUBIECTUL I

1. Să se calculeze $(1+2i)^2+(1-2i)^2$.
2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația
$$\log_2(4^x-2)=\log_2(3\cdot 2^x-4).$$
3. Să se calculeze suma $f(1)+f(2)+\ldots+f(1000)$, știind că $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x+1$.
4. Să se determine probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $\{51,52,\ldots,100\}$ acesta să fie divizibil cu 7.
5. Aflați distanța de la punctul $A(1,2)$ la dreapta de ecuație $3x-4y+2=0$.
6. Ştiind că $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&1&2\\m&-1&2\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$.
   a) Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât $\det A=2$.
   b) Pentru $m=0$, să se determine $x\in\mathbb{R}$ știind că $\det(A+xI_3)=0$.
   c) Pentru $m=1$ să se determine $X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ astfel încât $A\cdot X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
2. Considerăm mulțimea $G=(3,+\infty)$ și legea de compoziție
$$x*y=xy-3x-3y+12,\ \forall x,y\in G.$$
   a) Arătați că $x*y=(x-3)(y-3)+3$, $\forall x,y\in G$.
   b) Rezolvați sistemul $\begin{cases}x*y=15\\x*6=y.\end{cases}$
   c) Să se arate că legea este asociativă.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x^2-3x-1}{(x-1)^2}$.
   a) Arătați că pentru $x\neq 1$ avem $f(x)=2+\frac{x-3}{(x-1)^2}$.
   b) Determinați $f'(x)$ și arătați că funcția f este descrescătoare pe $(-\infty,1)$.
   c) Determinați punctul de pe graficul funcției în care tangenta la grafic are panta egală cu -5.
2. Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\ln x$.
   a) Să se determine $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât funcția $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=ax^2\ln x+bx^2$ să fie o primitivă a lui f.
   b) Să se calculeze aria suprafeței cuprinsă între graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$, $x=e$.
   c) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\int_1^x f(t)dt}{x^3}$.

[4] Profesor, Grup Şcolar Construcții de Mașini, Colibași, popescuadina73@yahoo.com

Testul 5

Ioana Diana Bucșan[5]

SUBIECTUL I

1. Se consideră numărul complex $z = 1 - 2i$. Calculați z^2.
2. Să se calculeze suma primilor șase termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 1$ și $a_2 = 4$.
3. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 8$. Să se determine punctul care aparține graficului funcției f și are abscisa egală cu ordonata.
4. Să se determine câte numere naturale de câte trei cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{5, 6, 7, 8\}$
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(3, -4)$ și $B(4, -3)$. Să se determine coordonatele simetricului punctului A față de punctul B.
6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC, știind că $BC = 25$ și $m(\sphericalangle A) = 30°$.

SUBIECTUL al II-lea

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 2a+7 & 3 \\ 3-a & 2 \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
   a) Să se calculeze $\det A(-2)$.
   b) Determinați numărul real a știind că $\det A(a) = -9$.
   c) Determinați inversa matricei $A(0)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 3xy - 9x - 9y + 30$.
   a) Arătați că $x \circ y = 3(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y.
   b) Calculați $1 \circ \sqrt{2} \circ \sqrt{3} \circ \ldots \circ \sqrt{2020}$.
   c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL al III-lea

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$.
   a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}^\star$.
   b) Să se demonstreze că funcția f este descrescătoare pe $(0, 2]$.
   c) Să se arate că $2e^{\sqrt{3}} \leq 3e^{\sqrt{2}}$.
2. Se consideră funcția $f : (2, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.
   a) Arătați că $\int_3^5 (x-2) \cdot f(x)dx = \ln \frac{6}{5}$.
   b) Calculați $\int_3^5 (x^2 + x - 6) \cdot f(x)dx$.
   c) Calculați aria suprafeței delimitate de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 3$ și $x = 4$.

[5] Profesor, Școala Gimnazială Dobrești, ioana.diana117@yahoo.com

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

TESTUL 1

Marius Macarie[1]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se calculeze suma primilor 8 termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, știind că $b_2 = 32$, $b_3 = 16$. **(5p)**

2. Se consideră funcția bijectivă $f : (0, \infty) \to (4, \infty)$, $f(x) = x^2 + 4$. Să se calculeze $f^{-1}(5)$, unde f^{-1} este inversa lui f. **(5p)**

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{1-2x} - \dfrac{5}{2^x} + 2 = 0$. **(5p)**

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o submulțime nevidă a mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, aceasta să aibă toate elementele pare. **(5p)**

5. Fie $A(2, 1)$, $B(-2, 4)$, $C(0, 2)$. Să se determine ecuația dreptei ce trece prin A și este paralelă cu mediatoarea segmentului BC. **(5p)**

6. Ştiind că $a \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ și $\cos a = -\dfrac{5}{13}$, să se calculeze $\operatorname{tg} 2a$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră sistemul $\begin{cases} x + 2y - 2z = 0 \\ mx - 4y + z = 0 \\ 2x - 2y - z = 0 \end{cases}$, $m \in \mathbb{R}$, și matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ m & -4 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care sistemul admite numai soluția banală. **(5p)**

b) Să se determine $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ astfel încât $A(0) \cdot X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$. **(5p)**

c) Pentru $m = 1$, să se determine soluția sistemului (x_0, y_0, z_0) pentru care $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = \dfrac{5}{2}$ și x_0, y_0, z_0 sunt numere reale negative. **(5p)**

2. Pe mulțimea $G = (0, \infty)$, se consideră legea de compoziție $x \star y = \sqrt[5]{x^{\log_3 y}}$.

a) Arătați că $2 \star 243 = 2$. **(5p)**

b) Demonstrați că legea „$\star$” este asociativă. **(5p)**

c) Determinați $x \in G$ care sunt egale cu simetricele lor în raport cu legea „$\star$”. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{x^2 + 4}}$.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, macariem@yahoo.com

a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{2(x+2)}{(x^2+4)\sqrt{x^2+4}}$, $x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

b) Calculați $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x))^x$. **(5p)**

c) Determinați imaginea funcției f. **(5p)**

2. Se consideră șirul $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^2+5x+6}dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Să se calculeze I_1. **(5p)**

b) Să se arate că $I_{n+2} + 5I_{n+1} + 6I_n = \dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

c) Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n$. **(5p)**

TESTUL 2

Roxana Maria Manea[2]

SUBIECTUL I (30p)

1. Determinați rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_1 = 9$, $a_6 = 49$. **(5p)**

2. Aflați coordonatele punctelor de intersecție ale graficului funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu axa absciselor, unde $f(x) = x^2 - 2x - 3$. **(5p)**

3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x-4} = \dfrac{1}{3^{-2}}$. **(5p)**

4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să nu fie pătrat perfect. **(5p)**

5. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $P(1-\sqrt{3}, 3-\sqrt{3})$. Determinați ecuația dreptei ce trece prin punctul P și este paralelă cu dreapta de ecuație $3\sqrt{2}x + \sqrt{6}y - 5 = 0$. **(5p)**

6. Arătați că $(\sin x + 4\cos x)^2 + (4\sin x - \cos x)^2 = 17$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Se consideră matricea $A(p) = \begin{pmatrix} -p+1 & 0 & 2p \\ 0 & 1 & 0 \\ -p & 0 & 2p+1 \end{pmatrix}$, $p \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $\det A(-1) = 0$. **(5p)**

b) Arătați că $A(p^2) \cdot A(q^2) = A(p^2q^2 + p^2 + q^2)$, pentru orice numere reale p și q. **(5p)**

c) Arătați că nu există numere reale p astfel încât să aibă loc relația **(5p)**

$$A(p^2) \cdot A(p^2) \cdot A(3) = A(0).$$

2. Se consideră polinomul $f = (X^2+1)(X+2) - p$, $p \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că $f(-1) = 2 - p$, $p \in \mathbb{R}$. **(5p)**

[2] Profesor, Şcoala Gimnazială ,,Nicolae Crevedia", Crevedia Mare, roxam86@yahoo.com

b) Pentru $p = 1$, calculați $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f. **(5p)**

c) Pentru $p = 2$, aflați rădăcinile polinomului f. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{3}x - \sqrt{3x^2 + 1}$.

a) Arătați că $f'(x) = \dfrac{-3x}{\sqrt{3x^2+1}} + \sqrt{3}$, $x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

b) Aflați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f. **(5p)**

c) Arătați că funcția f este concavă pe $\mathbb{R}$. **(5p)**

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x + e^x$.

a) Arătați că $\int_1^e \sqrt{e}(f(x) - e^x)dx = \sqrt{e}$. **(5p)**

b) Arătați că orice primitivă a funcției f este strict crescătoare pe intervalul $(1, \infty)$. **(5p)**

c) Aflați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 1$ și $x = e$. **(5p)**

TESTUL 3

Raluca Mihaela Georgescu[3]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se afle $|z_1^2 + z_2|$, știind că z_1 și z_2 sunt rădăcinile complexe ale ecuației $z^2 + 4z + 5 = 0$. **(5p)**

2. Să se determine valorile întregi ale lui a, știind că $(a + 2)x^2 + (a - 1)x - a \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

3. Să se rezolve ecuația $3^{\log_2 4^x} - 4 \cdot 3^{\log_2 2^x} + 3 = 0$. **(5p)**

4. Să se determine termenul care conține x^4 din dezvoltarea binomului $(2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x})^{10}$. **(5p)**

5. Fie $A(2, 5)$, $B(-1, 2)$, $C(1, 3)$. Să se determine lungimea înălțimii din C în triunghiul ABC. **(5p)**

6. În triunghiul ABC se cunosc $AB = 5\sqrt{2}$, $BC = 5$, $m(\sphericalangle A) = 30°$. Să se determine lungimea laturii AC. **(5p)**

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} \ln e^2 & \ln e & 0 \\ 0 & \ln e & \ln e^2 \\ 0 & 0 & \ln e \end{pmatrix}$.

a) Să se verifice că $\det A = 2$. **(5p)**

b) Să se determine $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, astfel încât $A + B = I_3$. **(5p)**

c) Să se calculeze A^n, $n \in \mathbb{N}^*$. **(5p)**

[3] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

2. Pe mulțimea numerelor reale este definită legea de compoziție $x \star y = xy - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 2 + \sqrt{2}$.

a) Să se arate că $x \star y = (x - \sqrt{2})(y - \sqrt{2}) + \sqrt{2}$, $x, y \in \mathbb{R}$. **(5p)**

b) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația $x \star x \star x = x$. **(5p)**

c) Ştiind că legea este asociativă, să se calculeze

$$2^{\log_4 1} \star 2^{\log_4 2} \star 2^{\log_4 3} \star \ldots \star 2^{\log_4 2020}.$$

(5p)

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie $f : D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$.

a) Să se verifice că $f'(x) = \dfrac{x^4 - x^2 - 8x + 2}{(x^2 - 1)^2}$, $\forall\, x \in D$. **(5p)**

b) Să se determine asimptotele funcției f. **(5p)**

c) Să se determine numărul rădăcinilor reale ale ecuației $f'(x) = 0$. **(5p)**

2. Fie $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x^2 - 4|}{x}$.

a) Să se calculeze $\int_3^5 x^2 f(x)dx$. **(5p)**

b) Să se determine aria porțiunii plane determinate de graficul lui f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 4$ și $x = 5$. **(5p)**

c) Să se determine volumul corpului definit prin rotirea graficului funcției $g : [1, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = xf(x)$, în jurul axei Ox. **(5p)**

TESTUL 4

Antonio Nuică[4]

SUBIECTUL I (30p)

1. Să se determine suma primilor 100 de termeni ai progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq 1}$, pentru care $b_1 = 1$, $b_3 = 4$. **(5p)**

2. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 - mx + 1 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. **(5p)**

3. Să se rezolve ecuația $\log_3(x^2 - 1) = 1$. **(5p)**

4. Să se afle probabilitatea ca alegând un număr impar de două cifre, suma cifrelor lui să fie 4. **(5p)**

5. Să se determine aria triunghiului ABC, cu $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. **(5p)**

6. Să se rezolve ecuația $\cos 4x = -\dfrac{1}{2}$. **(5p)**

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, antonio_74nm@yahoo.com

SUBIECTUL al II-lea (30p)

1. Fie $A(x,y)=\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, x, $y \in \mathbb{R}$, și punctele $M(1,2)$, $N(2,3)$.

a) Să se determine $\det A(1,0)$. **(5p)**

b) Deduceți că dreapta d de ecuație $\det A(x,y)=0$ coincide cu MN. **(5p)**

c) Să se determine punctele $P(x,y)$ cu $x-y=1$ pentru care aria triunghiului MNP este 3. **(5p)**

2. Se dă polinomul $f=X^3-2X^2+mX+n$, m, $n \in \mathbb{R}$, cu rădăcinile x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine $x_1+x_2+x_3$. **(5p)**

b) Să se determine $m,n \in \mathbb{R}$ pentru care $X-1 \big| f$ și $x_1^2+x_2^2+x_3^2=8$. **(5p)**

c) Pentru m și n determinați la b), să se rezolve ecuația $f(x)=0$. **(5p)**

SUBIECTUL al III-lea (30p)

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

a) Să se arate că graficul lui f admite asimptote orizontale. **(5p)**

b) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției. **(5p)**

c) Să se determine intervalele de convexitate ale funcției. **(5p)**

2. Fie $f: D=\mathbb{R}\setminus\{2,3\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2-5x+6}$.

a) Să se determine a, $b \in \mathbb{R}$, astfel încât $f(x)=\dfrac{a}{x-2}+\dfrac{b}{x-3}$, $\forall\, x \in D$. **(5p)**

b) Să se determine primitivele lui f pe $(3,\infty)$. **(5p)**

c) Să se calculeze **(5p)**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_4^n f(t)dt.$$

Teste pentru admiterea la facultate

Testul 1

Raluca Mihaela Georgescu[1]

SUBIECTUL I

Fie polinomul $P(X) = X^4 - 5X^3 + mX^2 + 3X - 10$, cu $m \in \mathbb{R}$, care are rădăcinile $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4 \in \mathbb{C}$.

a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$, știind că $2 + i$ este rădăcină a polinomului și apoi să se determine $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$.
b) Să se calculeze $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4$ pentru $m = 7$.
c) Pentru $m = 7$ să se determine polinomul de gradul 4 ale cărui rădăcini sunt inversele rădăcinilor lui P.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 4x + 6 - a)e^x$, cu $a \in \mathbb{R}$.

a) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ știind că 2 este punct de inflexiune.
b) Pentru $a = 4$ să se determine ecuațiile tangentelor în punctele de inflexiune.
c) Pentru $a = 4$ să se calculeze aria subgraficului delimitat de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 0$, $x = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

În planul de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ și dreapta d de ecuație $y = x + 4$.

a) Să se determine coordonatele unui punct $C \in d$ astfel încât aria triunghiului ABC să fie 12.
b) Pentru punctul C determinat la punctul a) cu abscisa pozitivă, să se determine punctul $D \in d$ astfel încât $ABCD$ să fie trapez.
c) Să se determine coordonatele punctului de intersecție al diagonalelor trapezului găsit la punctul b).

Testul 2

Maria-Crina Diaconu[2]

SUBIECTUL I

Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (3m - 1)x^2 - 3(m + 1)x + m - 2$, unde m este un parametru real diferit de $\frac{1}{3}$.

a) Pentru $m = 1$ rezolvați ecuația $f(x) = 0$.
b) Să se determine valorile lui m pentru care $f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$.
c) Să se determine valorile lui m pentru care ecuația $f(x) = 0$ admite rădăcini reale și negative.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com
[2] Asist. univ. dr., Universitatea din Pitești, crina.diaconu@upit.ro

d) Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ sunt soluții ale ecuației $f(x) = 0$ și pentru $n \in \mathbb{N}^*$ definim $S_n = x_1^n + x_2^n$, aflați $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_5 = -1$.

SUBIECTUL al II-lea

Fie funcția $f : \mathbb{R} \to (1, +\infty)$, $f(x) = 9^x + 3^x + 1$.

a) Calculați $\int_0^2 f(x)dx$.
b) Să se arate că f este bijectivă și să se determine $g = f^{-1}$.
c) Să se calculeze $g'(2)$.
d) Să se stabilească semnul funcției f'' și să se precizeze monotonia funcției f'.

SUBIECTUL al III-lea

În reperul de coordonate xOy se consideră punctele $A(2,1), B(1,3), C(1,2)$.

a) Precizați coordonatele centrului și raza cercului circumscris $\triangle ABC$.
b) Precizați coordonatele centrului și raza cercului înscris în $\triangle ABC$.
c) Deduceți că $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \forall x \in \mathbb{R}$.
d) Rezolvați ecuația $2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$.

Testul 3

D.M.I. [3]

Algebră

1. Să se rezolve ecuația $\sqrt[3]{2-x} + \sqrt{x-1} = 1$, unde $x \in \mathbb{R}$.

2. Să se rezolve ecuația $\dfrac{8^x + 27^x}{12^x + 18^x} = \dfrac{7}{6}$, unde $x \in \mathbb{R}$.

3. Ştiind că suma coeficienților binomiali ai dezvoltării $(1+x)^n + (1+x)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ este 1536, să se determine coeficientul lui x^6.

4. Să se rezolve și să se discute sistemul

$$\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 + 5m + 7, \end{cases}$$

unde $m \in \mathbb{R}$.

5. a) Determinați toate polinoamele $f \in \mathbb{Z}_4[X]$ astfel încât $f^2 = \hat{0}$ și $\operatorname{grad}(f) = 2$.
b) Rezolvați aceeași problemă pentru polinoamele inelului $\mathbb{Z}_p[X]$, unde p este număr prim.

Elemente de Analiză Matematică

1. Fie șirul $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\cos \frac{\pi}{2k}}{2^k}$. Arătați că:

[3] Universitatea din Pitești, revista.matinf@upit.ro

a) șirul este strict monoton;

b) șirul are termenii pozitivi;

c) șirul este mărginit.

2. Fie funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\min\left\{x,\dfrac{2}{1+x^2}\right\}$. Studiați continuitatea și derivabilitatea funcției f, apoi calculați limita șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, $a_n=\int_0^n f(x)dx$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$. Determinați prin inducție completă $f^{(k)}(x)$. Arătați că $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f^{(k)}(x)=f(x)$.

4. Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x)\operatorname{arctg} x$ admite primitive și determinați aceste primitive.

5. Fie integrala $I_n=\int_e^{e^n}\frac{1+\ln t}{t(\ln t)(1+\ln^2 t)}dt, n\in\mathbb{N}$. Calculați I_n folosind schimbarea de variabilă $x=\ln t$ și $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Geometrie și trigonometrie

1. Fie AB și CD două coarde perpendiculare între ele ale unui cerc, $\{P\}=AB\cap CD$ și E punctul diametral opus lui A pe cerc. Să se arate că:

a) patrulaterul cu vârfurile în punctele B,C,D,E este trapez isoscel.

b) suma $PA^2+PB^2+PC^2+PD^2$ este constantă.

2. Să se rezolve ecuația $\cos^2 x+4\sin x\cos x-2\sin^2 x-2=0$.

3. Într-un vas închis în formă de con circular drept cu înălțimea h, cu vârful în jos și baza orizontală se găsește un lichid care se ridică până la înălțimea $h_1, 0<h_1<h$. Dacă vasul se răstoarnă cu vârful în sus și baza orizontală, determinați în funcție de h și h_1 înălțimea până la care se ridică lichidul.

4. a) Demonstrați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leq\frac{1}{8}.$$

b) În ce caz are loc egalitatea?

5. În patrulaterul convex $ABCD$, E este mijlocul laturii $[AB]$ și F mijlocul laturii $[CD]$. Să se demonstreze că dacă AB nu este paralelă cu CD și dacă AB nu este perpendiculară pe CD, atunci mijloacele segmentelor $[AF],[CE],[BF],[DE]$ sunt vârfurile unui paralelogram ce nu poate fi romb.

(Admiterea la Universitatea din Pitești, specializările *Matematică* și *Matematică-Informatică*, 1998)

Teste grilă pentru admiterea la facultate

Testul 1

Mihai Florea Dumitrescu[1]

1. Mulțimea valorilor numărului real x, astfel încât are loc egalitatea $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$, unde $A = \begin{pmatrix} x & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ x & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$ este:

   a) $\{0, 1\}$; b) $\left\{1, \frac{1}{6}\right\}$; c) $\left\{0, \frac{1}{6}\right\}$; d) $\{-1, 1\}$; e) $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$.
2. Suma soluțiilor ecuației $\sqrt[3]{7x+1} + \sqrt{x} = 3^x$ este:

   a) 1; b) 2; c) 0; d) 3; e) $\frac{2}{9}$.
3. Suma $S = \arcsin(\sin 2) + \arcsin(\sin 4)$ este egală cu:

   a) 6; b) $\pi + 6$; c) 3; d) $2\pi - 6$; e) $\pi - 6$.
4. Integrala $\int_0^1 x^3(x^2+1)^4 dx$ este egală cu:

   a) $\frac{41}{20}$; b) $\frac{43}{20}$; c) $\frac{17}{60}$; d) $\frac{29}{30}$; e) $\frac{7}{15}$.
5. Limita $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{\operatorname{tg} 2x}{x - \operatorname{tg} x}}$ este egală cu:

   a) 0; b) 1; c) $\sqrt{e}$; d) e^2; e) e^{-2}.
6. Punctul fix al familiei de drepte $d_m : (m+1)x - (2m-1)y = m + 2, m \in \mathbb{R}$, este:

   a) $P\left(\frac{5}{3}, 2\right)$; b) $P\left(1, \frac{1}{3}\right)$; c) $P\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$; d) $P\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{2}\right)$; e) $P\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$.
7. Mulțimea soluțiilor ecuației $\cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -3, x \in \mathbb{R}$ este:

   a) $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; b) $\{2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; c) $\left\{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$; d) $\oslash$; e) $\left\{\frac{(3k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
8. Limita $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sum\limits_{k=2}^{n} C_k^2}{\sum\limits_{k=2}^{n} nk}$ este egală cu:

   a) 0; b) 1; c) $\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{6}$; e) $\frac{1}{2}$.
9. Dacă ecuația $f(x) = m, m \in \mathbb{R}$ unde $f : \mathbb{R} \setminus \{2, 3\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln|x^2 - 5x + 6|$ are exact două rădăcini reale, atunci:

   a) $m \in \oslash$; b) $m \in (-\ln 4, +\infty)$; c) $m \in (-\infty, -\ln 4)$;

   d) $m \in (-\infty, 1)$; e) $m \in (3, +\infty)$.
10. Restul împărțirii polinomului $f = X^{2020} - X^{20} + 2$ la polinomul $g = X(X+1)^2$ este:

    a) $r = 2000X^2 + 2$; b) $r = 2000X^2 + 2000X$; c) $r = X^2 + 2000X + 2$;

    d) $r = 2000X^2 + 2000X + 2$; e) $r = 2020X^2 + 2$.
11. Limita $l = \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{1^n + 2^n + 3^n + ... + 2020^n}$ este egală cu:

    a) 0; b) 1; c) 2021; d) 2020; e) $\sqrt{2020}$.

[1] Liceul „Ștefan Diaconescu”, Potcoava, florin14mihai@yahoo.com

12. Valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ pentru care rangul matricei $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ a & 2 & a \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix}$ este 2, este:

    a) 0; b) 2; c) 4; d) -2; e) 3.

13. Dacă $\varepsilon = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}, k \in \{1,2,3,4\}$, atunci numărul $(1+\varepsilon)\cdot(1+\varepsilon^2)\cdot\ldots\cdot(1+\varepsilon^{2020})$ este egal cu:

    a) 2^{404}; b) 2^{2020}; c) 2^{505}; d) 2; e) 0.

14. Suma $S = [\sqrt[3]{1^2\cdot 4}] + [\sqrt[3]{2^2\cdot 5}] + \cdots + [\sqrt[3]{n^2(n+3}]$ este egală cu:

    a) n^2; b) n^2+n; c) $\frac{n^2+n}{2}$; d) $\frac{n+1}{2}$; e) $\frac{n}{2}$.

15. Integrala $\int_{-1}^{1} \frac{x^4}{e^x+1}dx$ este egală cu:

    a) e; b) $-\frac{1}{5}$; c) $\frac{3}{5}$; d) $\frac{1}{5}$; e) $\frac{2}{5}$.

Testul 2

Mihaela Gabor[2]

1. Negați propoziția "Toți copiii au ochii verzi și părul negru".

   a) Nu toți copiii au ochii verzi și părul negru.

   b) Nu toți copiii au ochii verzi sau părul negru.

   c) Există copii care nu au ochii verzi și părul negru.

   d) Există copii care nu au ochii verzi sau părul negru.

2. Rezolvați în numere reale ecuația $\left[\frac{2x}{3}\right] = \frac{x+1}{2}$.

   a) {2,3,4}; b) {3}; c) {3,5,7}; d) {5,7}.

3. Să se calculeze cel mai mare termen al dezvoltării $\left(\frac{2}{7}+\frac{5}{7}\right)^{30}$.

   a) T_1; b) T_{31}; c) T_{21}; d) T_{22}.

4. Rezolvați în numere reale ecuația: $x^{3\lg x} = 10x^2$.

   a) 1,-$\frac{1}{3}$; b) 1; c) 10,$\frac{1}{10^3}$; d) 10,$\frac{1}{\sqrt[3]{10}}$.

5. Rezolvați în numere reale ecuația $\frac{|x|-2}{4} + \frac{|x|+1}{2} = 6$.

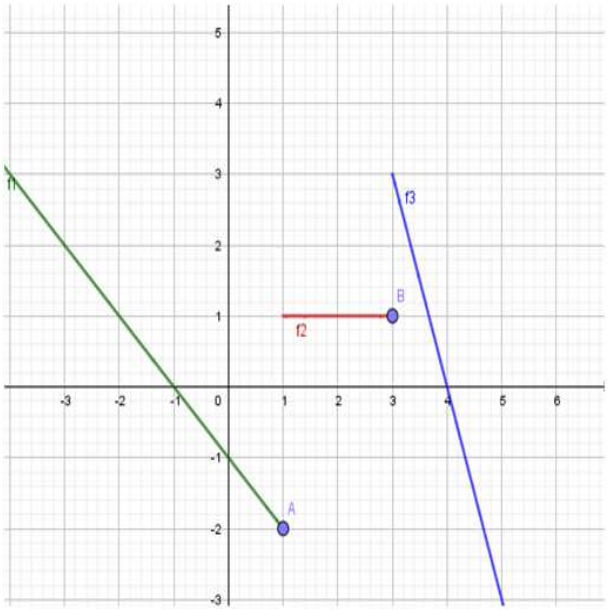
   a) {2,3}; b) {-8,8}; c) {-6,6}; d) {-7,7}.

6. Câte funcții $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3,4,5\}$ cu $f(2) \neq f(3)$, se pot defini?

   a) 75; b) 100; c) 125; d) 50.

7. Studiați graficul din imagine și stabiliți intervalele în care funcția este strict negativă.

[2] Colegiul Național ,,C. Carabella", Târgoviște, mihaela_gab0r@yahoo.com



a) $(-\infty, 1)$; b) $(-1, 1] \cup (4, \infty)$; c) $(-\infty, 0)$; d) $(-1, 1) \cup (3, \infty)$.

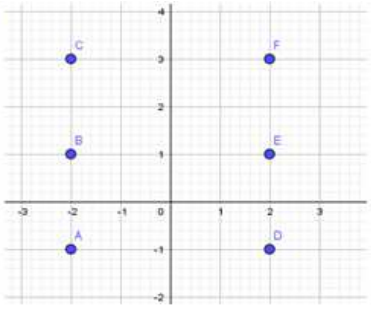
8. Studiați graficul de mai sus și stabiliți imaginea fiecărei ramuri.

a) $\begin{cases} \text{Im } f_1 = (-\infty, -2] \\ \text{Im } f_2 = (1, 3) \\ \text{Im } f_3 = (-\infty, 3] \end{cases}$ b) $\begin{cases} \text{Im } f_1 = [-2, \infty) \\ \text{Im } f_2 = \{1\} \\ \text{Im } f_3 = (-\infty, 3] \end{cases}$

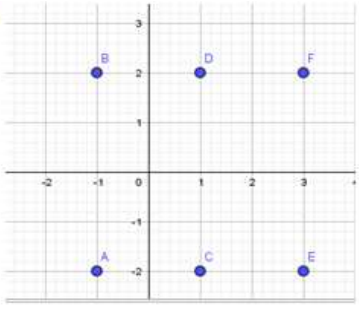
c) $\begin{cases} \text{Im } f_1 = [-2, \infty) \\ \text{Im } f_2 = \{1\} \\ \text{Im } f_3 = (-\infty, 3) \end{cases}$ d) $\begin{cases} \text{Im } f_1 = (-\infty, -2] \\ \text{Im } f_2 = \{1\} \\ \text{Im } f_3 = (-\infty, 3] \end{cases}$

9. Se dau mulțimile $A = \{-2, 2\}$, $B = \{-1, 1, 3\}$. Să se determine $A \times B$.

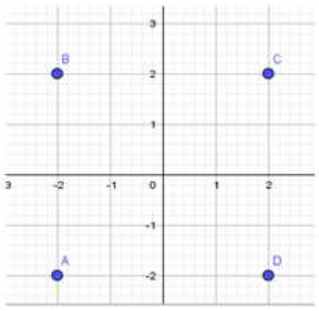
a)



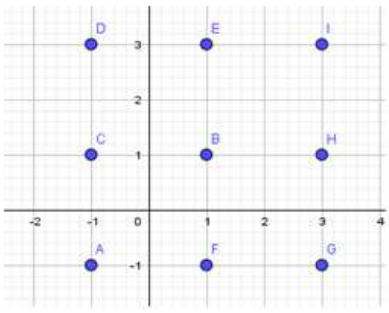
b)



c)



d)



10. Fie sistemul $\begin{cases} x + ay + z &= 0 \\ ax - ay + z &= 0 \\ x + (2a-1)y + z &= 0 \end{cases}$, $a \in \mathbb{R}$. Valoarea parametrului real $a \in \mathbb{R}$

pentru care sistemul admite și soluții diferite de soluția nulă este:

a) $a=-1$; b) $a=5$; c) $a=2$; d) $a=1$.

11. Fie șirul $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, dat de formula

$$x_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{2}{k}\right),\ n\in\mathbb{N},\ n>0.$$

Atunci limita șirului este:

a) 1; b) e; c) e^2; d) 0.

12. Valoarea constantelor $a,b\in\mathbb{R}$ pentru care funcția $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x, & \text{dacă } x\in(0,e]\\ ax+b, & \text{dacă } x>e\end{cases}$ este derivabilă pentru orice $x>0$ este:

a) $a=e,b=e$; b) $a=3/e,b=-2$; c) $a=1,b=1$; d) $a=1,b=-1$.

13. Ecuația tangentei la graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-6x^2+5x+4$ în punctul de inflexiune este:

a) $y=-x$; b) $y=x$; c) $y=-7x+12$; d) $y=3x-4$.

14. Valoarea integralei $\int_e^1\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\ln x\right)}{x}dx$ este:

a) $I=1$; b) $I=0$; c) $I=-\frac{2}{\pi}$; d) $I=\ln\frac{\pi}{2}$.

15. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}-\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+4(x+1)^{-2}$ și fie $S(a)$ aria domeniului plan delimitat de graficul funcției și de dreptele $y=x,\ x=1,\ x=a,\ a>1$. Atunci $L=\lim\limits_{a\to\infty}S(a)$ este:

a) $L=1$; b) $L=2$; c) $L=1+4\ln 2$; d) $L=\ln 2$.

Testul 3

Rădulescu Maria-Florentina[3]

1. Într-o progresie aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$ se cunosc $a_4=7$ și $a_9=22$. Atunci termenul a_{12} este egal cu:

a) 31; b) 9; c) 6; d) 8; e) 12.

2. Imaginea funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ este:

a) [-1,1]; b) (-1,1]; c) [-1,1); d) (-1,1); e)(-1,2].

3. Soluțiile reale ale ecuației $f^2(x)+2f(x)-1=0$, știind că $f(x)=x+1$, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, sunt:

a) $\{1,2\}$; b) {0,4}; c) {-4,0}; d) $\{-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\}$; e) {6,8}.

4. Dacă $x_1,\ x_2$ sunt rădăcinile reale ale ecuației $x^2-6x+5=0$, atunci ecuația care are rădăcinile $\dfrac{x_1+1}{2}$ și $\dfrac{x_2+1}{2}$ este echivalentă cu:

a) $y^2-3y+3=0$; b) $2y^2-4y+3=0$; c) $y^2+4y-3=0$;

d) $y^2-4y+3=0$; e) $y^2+2y+3=0$.

5. Fie funcția $f:(0,\infty)\setminus\{e\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{1-\ln x}$. Atunci $f'(x)$ este:

a) $\dfrac{1}{x(1-\ln x)}$; b) $\dfrac{2}{(1-\ln x)^2}$; c) $\dfrac{2}{x\ln x}$; d) $\dfrac{3}{x(1-\ln x)}$; e) $\dfrac{2}{x(1-\ln x)^2}$.

[3] Profesor, Școala Gimnazială Nr.1, Pietroșani, raducumaria31@gmail.com

6. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ și funcția $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $f(X) = AX^2$. Atunci $f(A)$ este:

   a) $\begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 27 & 10 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} -10 & -9 \\ -27 & 10 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ 27 & 10 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & 27 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} -10 & 9 \\ -10 & -27 \end{pmatrix}$.

7. Rezultatul calculului $[\sqrt{2020}] + 6 \cdot \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x este:

   a) 44; b) 46; c) 48; d) 42; e) 40.

8. Știind că $x_1,\ x_2,\ x_3 \in \mathbb{C}$ sunt soluțiile ecuației $x^3+4x = 0$, atunci valoarea determinantului $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \\ x_3 & x_1 & x_2 \end{vmatrix}$ este:

   a) 1; b) 2; c) 0; d) -2; e) 4.

9. Se dau matricele $A = \begin{pmatrix} \lg 10 & e^{\ln\sqrt{16}} \\ \dfrac{1}{\log_9 3} & e \ln\sqrt{e} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -\lg 2 & 4 \\ \log_3 9 & -\dfrac{e}{2} + 6 \end{pmatrix}$. Calculați $C = A + B$.

   a) $\begin{pmatrix} \lg 5 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & \dfrac{e}{2} \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

10. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$, care are forma algebrică $f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + ... + a_1X + a_0$. Diferența $a_{100} - a_{99}$ este:

    a) 3; b) i; c) 4; d) 2; e) 1.

11. Se consideră funcțiile $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_a(x) = \dfrac{1}{|x-a|+4}$, $a \in \mathbb{R}$. Atunci $\int\limits_0^3 f_2(x)dx$ este:

    a) $\ln\dfrac{20}{9}$; b) $-\ln\dfrac{20}{9}$; c) $-\ln\dfrac{90}{17}$; d) $\ln\dfrac{90}{17}$; e) $\ln\dfrac{15}{8}$.

12. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Atunci $(A - A^t)^{2020}$ este:

    a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Soluția întreagă a ecuației

$$\underbrace{x \circ x \circ \cdots \circ x}_{de\ 2020\ ori} = 2^{2020} + 3,$$

    știind că $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12, \forall x, y \in \mathbb{Z}$, este:

    a) 4; b) 5; c) 3; d) 6; e) 2.

14. Soluția sistemului $\begin{cases} 4x + 3y &= 5 \\ 5x + 3z &= 4 \\ 5y + 4z &= 3 \end{cases}$ este:

    a) $\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ 1\right)$; b) $\left(\frac{3}{5},\ 1,\ \frac{4}{5}\right)$; c) (0,1,2); d) $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5},\ 0\right)$; e) $\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5}\right)$.

15. Funcția f pentru care $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, este o primitivă a sa, are forma:

    a) $x^2 + x + 1$; b) $x^2 - x + 1$; c) $\dfrac{1}{x^2 - x - 1}$; d) $\dfrac{1}{x^2 - x + 1}$; e) $\dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.

Testul 4

Raluca Mihaela Georgescu[4]

1. Suma soluțiilor reale ale ecuației $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2}$ este:

   a) 2; b) 4; c) 1; d) 3; e) 0.

2. Valorile reale ale lui x pentru care este definit logaritmul $\log_{\frac{x^2-4}{2x-5}}(x-1)$ sunt:

   a) $(1,2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$; b)$[1,2] \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$; c) $(-1,2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$; d) $(-2,2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$;

   e) $(-1,1) \cup (1,2) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+x+3}{x^2+1}$. Atunci $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$, unde $F(x)$ este acea primitivă a lui f pentru care $F(1) = \dfrac{\pi}{4}$, este:

   a) $\frac{5}{2}$; b) $-\frac{5}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{2}$; e) 0.

4. Modulul sumei rădăcinilor ecuației $2^{x^2+x-1} = 32$ este:

   a) 1; b) 5; c) 2; d) 3; e) 4.

5. Numărul asimptotelor funcției $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^3+2}{x^2+5x+6}$ este:

   a) 1; b) 2; c) 3; d) 4; e) 0.

6. Dacă într-o progresie geometrică $(b_n)_{n\geq 1}$ cu rația supraunitară avem $b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 = 27$ și $b_1 + b_2 + b_3 = 13$, atunci S_{10} este:

   a) $\frac{3^{10}-1}{2}$; b) $\frac{3^{11}-1}{2}$; c) $\frac{3^{10}+1}{2}$; d) $\frac{3^{11}+1}{2}$; e) $\frac{3^{10}-1}{6}$.

7. Valorile parametrilor $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul $f = X^5 - 5X^4 - 6X^3 + 76X^2 - 8aX + 4b$ are o rădăcină reală triplă sunt:

   a) $a = 18, b = 22$; b) $a = 19, b = 24$; c) $a = -19, b = 24$;

   d) $a = 19, b = -22$; e) $a = 19, b = -24$.

8. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 24x^2 + 45x - 10$. Atunci $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{x^2+x-6}$, unde $a > 0$ este punct de inflexiune, este:

   a) $-\frac{19}{5}$; b) $\frac{19}{5}$; c) $-\frac{12}{5}$; d) $\frac{12}{5}$; e) -12.

9. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 3^{\frac{1}{3}\log_3 5^3} & \log_4 16 - \log_2 4 \\ \log_4 3 - \frac{1}{2}\log_2 3 & \sqrt[3]{\log_3 3^8 + \log_3 3^{-7}} \end{pmatrix}$. Atunci A^n este:

   a) $\begin{pmatrix} 5^{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; b) $\begin{pmatrix} 5^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; c) $\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix} 5^{n+1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Mulțimea soluțiilor ecuației $x^3 - \hat{2}x^2 + x + \hat{3} = \hat{0}$ peste corpul $\mathbb{Z}_5$ este:

    a) $\{\hat{4}\}$; b) $\{\hat{2}\}$; c) $\{\hat{1}, \hat{3}\}$; d) $\{\hat{3}\}$; e) $\{\hat{2}, \hat{3}\}$.

11. Aria subgraficului determinat de graficul funcției $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{|x^2-9|}{|x|}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x = 2$, $x = 4$ este:

[4] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, gemiral@yahoo.com

a) $1-9\ln\frac{9}{8}$; b) $1+9\ln\frac{9}{8}$; c) $2+9\ln\frac{8}{9}$; d) $1-9\ln\frac{3}{2}$;; e) $1+9\ln\frac{3}{2}$.

12. Numărul rădăcinilor din intervalul $(2,5)$ ale ecuației $x^3-6x^2+9x+4=0$ este:

a) 1; b) 3; c) 2; d) 0; e) 4.

13. Valorile parametrului real m pentru care parabola asociată funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2+(m+2)x+3$ se află deasupra axei Ox sunt:

a) $m\in(-4\sqrt{3},4\sqrt{3})$; b) $m\in(4\sqrt{3},\infty)$; c) $m\in[-4\sqrt{3},0)$;

d) $m\in(0,4\sqrt{3}]$; e) $m\in(0,4\sqrt{3})$.

14. Suma pătratelor rădăcinilor ecuației $\begin{vmatrix} x & 3 & 0\\ 1 & x & 4\\ 3 & 1 & x\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x+3 & x-1\\ 1 & 5\end{vmatrix}$ este:

a) 22; b) 23; c) 10; d) 20; e) 21.

15. Valoarea integralei $\int\limits_1^2 \frac{\log_3 3^{x^2+3x}\ln x}{x+3}dx$ este:

a) $\ln\frac{4}{e}$; b) $2\ln 2-13$; c) $\ln 4e$; d) $\ln 4+\frac{3}{4}$; e) $\ln 4-\frac{3}{4}$.

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU EXAMENE

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Științe ale naturii

Testul 1

Maria Miroiu [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre următoarele expresii C/C++ are valoarea 1 dacă și numai dacă variabilele `x` și `y` (de tip `int`) memorează două numere impare consecutive? **(4p.)**
   a) `(x+y)%2==0`
   b) `(x-y==2) || (y-x==2)`
   c) `x%2==1 && y%2==1`
   d) `abs(x-y)==2 && y%2==1`
2. Care din următoarele expresii C/C++ are ca rezultat valoarea maximă dintre `x` și `y`? **(4p.)**
   a) `(x+y-abs(x-y))/2`
   b) `(x+y+abs(x-y))/2`
   c) `(x-y-abs(x+y))/2`
   d) `x+y-abs(x-y)/2`
3. Care din următoarele instrucțiuni C/C++ realizează eliminarea cifrei sutelor pentru un număr natural nenul `x` dat? **(4p.)**
   a) `x = x%1000*100+x%100;`
   b) `x = x/1000*100+x%100;`
   c) `x = x%100*100+x/100;`
   d) `x = x/1000+x%100;`
4. Pentru a verifica dacă într-un tablou unidimensional există elementul cu valoarea `x=37` prin aplicarea metodei căutare binară, presupunem că succesiunea de elemente a căror valoare se compară cu `x` este `44`, `26`, `37`. În acestă situație, care pot fi elementele tabloului unidimensional? **(4p.)**
   a) `26,29,37,44,48,63,68`
   b) `14,26,37,41,45,62,67,73`
   c) `14,26,37,44,48,63,68,72`
   d) `3,26,37,41,44,63,68,72`
5. Care este numărul de comparații realizate la aplicarea algoritmului de interclasare a vectorilor `(7,9,9)` și `(6,10,14,15)`? **(4p.)**
   a) `5` b) `6` c) `4` d) `3`

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul următor, descris în pseudocod, în care toate variabilele sunt de tip întreg, cu valori strict pozitive. Notația `x%y` reprezintă restul împărțirii valorii variabilei `x` la valoarea variabilei `y`, iar `[x]` partea întreagă a valorii numărului real `x`.

[1] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

a) Scrieți ce valoare se va afișa, dacă se citesc, în această ordine, valorile 5,3,15,54,7,9,27. **(6p.)**
b) Dacă pentru n și d se citesc valorile 4, respectiv 2, scrieți un șir de n valori de intrare care s-ar putea citi, astfel încât, în urma executării algoritmului,să afișeze valoarea 4. **(6p.)**
c) Scrieți un program C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura `cat timp ... executa` cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**

```
citeste n, d
m ← 0
pentru i←1,n executa
|    citeste x
|    k ← 0
|    cat timp x%d=0 executa
|    |   k ← k+1
|    |_  x ← [x/d]
|    daca k>m atunci
|_   |_  m ← k
scrie m
```

2. Se consideră variabilele `A,B,C` de tip structură cu eticheta `punct2D`, structură ce memorează valorile reale ale abscisei și ordonatei unui punct din plan. Scrieți o secvență de instrucțiuni C/C++ pentru afișarea abscisei și ordonatei centrului de greutate al triunghiului de vârfuri `A,B,C`. **(6p.)**
3. În secvența de instrucțiuni de mai jos, variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg. Fără a utiliza alte variabile, scrieți una sau mai multe instrucțiuni C/C++ ce pot înlocui punctele de suspensie, astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze matricea de mai jos, dreapta. **(6p.)**

```
for (i=1;i<=5;i++) {
  for (j=1;j<=5;j++)
     ..............
  printf("\n");|cout<<endl;
}
```

```
< < < < *
< < < * >
< < * > >
< * > > >
* > > > >
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Scrieți, în pseudocod, un algoritm care citește de la tastatură două numere naturale `n` și `m` de maxim 9 cifre, apoi determină și afișează factorii primi care se găsesc atât în descompunerea în factori primi a lui `n`, cât și în descompunerea în factori primi a lui `m`, la aceeași putere, iar dacă nu există factori comuni la aceeași putere se va afișa mesajul `Imposibil`. **(10p.)**
Exemple: Pentru `n=2100` și `m=600` se afișează 3, 5 ($2100 = 2^2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}^2 \cdot 7$, $600 = 2^3 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}^2$), pentru `n=120` și `m=1400` se afișează 2 ($120 = \underline{2}^3 \cdot 3 \cdot 5$, $1400 = \underline{2}^3 \cdot 5^2 \cdot 7$), iar pentru `n=6` și `m=9` se afișează `Imposibil` ($6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3^2$).

2. Se citesc de la tastatură trei numere naturale nenule: `n`, `m` și `k`. Considerând un tablou unidimensional `x` cu elementele `1,2,...,n`, scrieți un program C/C++ care elimină elemente din `x`, începând cu al `m`-lea, apoi cele din `k` în `k`. **(10p.)**
Exemplu: Pentru `n=15`, `m=2` și `k=3`, tabloul unidimensional `x` devine `(1,3,4,6,7,9,10,12,13,15)`.

3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei `n` ($\leq 10^6$), iar pe următoarea linie un șir de `n` numere naturale de cel mult 2 cifre fiecare, acestea fiind separate prin spații. Se cere afișarea pe ecran a celui mai mare palindom de 7 cifre impare care apar în componența celor `n` numere de pe linia a doua din fișier (dacă nu se poate contrui un astfel de palindrom, se va afișa pe ecran valoarea 0).

a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**
b) Scrieți un program C/C++ care citește datele din fișier și rezolvă problema. **(7p.)**

Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

```
10
65  19  38  4  67  16  4  7  81  15
```

atunci pe ecran se vor afișa valorile `7519157`.

Testul 2

Maria Miroiu [2]

Limbajul Pascal

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Care dintre următoarele expresii Pascal are valoarea `true` dacă și numai dacă variabilele `x` și `y` (de tip `integer`) memorează două numere impare consecutive? **(4p.)**
   a) `not odd(x+y)`
   b) `(x-y=2) or (y-x=2)`
   c) `(odd(x)) and (odd(y))`
   d) `(abs(x-y) = 2) and (odd(y))`
2. Care din următoarele expresii Pascal are ca rezultat valoarea maximă dintre `x` și `y`? **(4p.)**
   a) `(x+y-abs(x-y)) div 2`
   b) `(x+y+abs(x-y)) div 2`
   c) `(x-y-abs(x+y)) div 2`
   d) `x+y-abs(x-y) div 2`
3. Care din următoarele instrucțiuni Pascal realizează eliminarea cifrei sutelor pentru un număr natural nenul `x` dat? **(4p.)**
   a) `x = (x mod 1000)*100+(x mod 100);`
   b) `x = (x div 1000)*100+(x mod 100);`
   c) `x = (x mod 100)*100+(x div 100);`
   d) `x = x div 1000 + x mod 100;`
4. Pentru a verifica dacă într-un tablou unidimensional există elementul cu valoarea `x=37` prin aplicarea metodei căutare binară, presupunem că succesiunea de elemente a căror valoare se compară cu `x` este `44`, `26`, `37`. În acestă situație, care pot fi elementele tabloului unidimensional? **(4p.)**
   a) `26,29,37,44,48,63,68`
   b) `14,26,37,41,45,62,67,73`
   c) `14,26,37,44,48,63,68,72`
   d) `3,26,37,41,44,63,68,72`
5. Care este numărul de comparații realizate la aplicarea algoritmului de interclasare a vectorilor `(7,9,9)` și `(6,10,14,15)`? **(4p.)**
   a) `5` b) `6` c) `4` d) `3`

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

[2] Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, maria.miroiu@gmail.com

1. Se consideră algoritmul următor, descris în pseudocod, în care toate variabilele sunt de tip întreg, cu valori strict pozitive. Notația `x%y` reprezintă restul împărțirii valorii variabilei `x` la valoarea variabilei `y`, iar `[x]` partea întreagă a valorii numărului real `x`.

```
citeste n, d
m ← 0
pentru i←1,n executa
|    citeste x
|    k ← 0
|    cat timp x%d=0 executa
|    |  k ← k+1
|    |_ x ← [x/d]
|    daca k>m atunci
|_   |_ m ← k
scrie m
```

   a) Scrieți ce valoare se va afișa, dacă se citesc, în această ordine, valorile `5,3,15,54,7,9,27`. **(6p.)**
   b) Dacă pentru `n` și `d` se citesc valorile `4`, respectiv `2`, scrieți un șir de `n` valori de intrare care s-ar putea citi, astfel încât, în urma executării algoritmului, să afișeze valoarea `4`. **(6p.)**
   c) Scrieți un program Pascal corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
   d) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, înlocuind structura `cat timp ... executa` cu o altă structură repetitivă. **(6p.)**

2. Se consideră variabilele `A,B,C` de tip record cu eticheta `punct2D` ce memorează valorile reale ale abscisei și ordonatei unui punct din plan. Scrieți o secvență de instrucțiuni Pascal pentru afișarea abscisei și ordonatei centrului de greutate al triunghiului de vârfuri `A,B,C`. **(6p.)**

3. În secvența de instrucțiuni de mai jos, variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg. Fără a utiliza alte variabile, scrieți instrucțiunile Pascal ce pot înlocui punctele de suspensie, astfel încât, în urma executării secvenței obținute, să se afișeze matricea de mai jos, dreapta. **(6p.)**

```
for i:=1 to 5 do
begin
  for j:=1 to 5 do
    ...............
  writeln;
end;
```

```
< < < < *
< < < * >
< < * > >
< * > > >
* > > > >
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul corect pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Scrieți, în pseudocod, un algoritm care citește de la tastatură două numere naturale `n` și `m` de maxim 9 cifre, apoi determină și afișează factorii primi care se găsesc atât în descompunerea în factori primi a lui `n`, cât și în descompunerea în factori primi a lui `m`, la aceeași putere, iar dacă nu există factori comuni la aceeași putere se va afișa mesajul `Imposibil`. **(10p.)**
   Exemple: Pentru `n=2100` și `m=600` se afișează 3, 5 ($2100 = 2^2 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}^2 \cdot 7$, $600 = 2^3 \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}^2$), pentru `n=120` și `m=1400` se afișează 2 ($120 = \underline{2}^3 \cdot 3 \cdot 5$, $1400 = \underline{2}^3 \cdot 5^2 \cdot 7$), iar pentru `n=6` și `m=9` se afișează `Imposibil` ($6 = 2 \cdot 3$, $9 = 3^2$).

2. Se citesc de la tastatură trei numere naturale nenule: `n`, `m` și `k`. Considerând un tablou unidimensional `x` cu elementele `1,2,...,n`, scrieți un program Pascal care elimină elemente din `x`, începând cu al `m`-lea, apoi din `k` în `k`. **(10p.)**
   Exemplu: Pentru `n=15`, `m=2` și `k=3`, tabloul unidimensional `x` devine `(1,3,4,6,7,9,10,12,13,15)`.

3. Fișierul **bac.txt** conține pe prima linie valoarea naturală nenulă a variabilei `n` ($\leq 10^6$), iar pe următoarea linie un șir de `n` numere naturale de cel mult 2 cifre fiecare, acestea fiind separate prin spații. Se cere afișarea pe ecran a celui mai mare palindom de 7 cifre impare care apar în componența celor `n` numere de pe linia a doua din fișier (dacă nu se poate contrui un astfel de palindrom, se va afișa pe ecran valoarea 0).

   a) Descrieți în limbaj natural un algoritm eficient de rezolvare a problemei. **(3p.)**
   b) Scrieți un program Pascal care citește datele din fișier și rezolvă problema. **(7p.)**

   Exemplu: Dacă în fișierul **bac.txt** se află numerele:

   ```
   10
   65  19  38  4  67  16  4  7  81  15
   ```

   atunci pe ecran se vor afișa valorile `7519157`.

Teste pentru examenul de Bacalaureat, specializarea Matematică-Informatică

Testul 1

Maria Tătulea [1]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabila `x` este de tip întreg și poate memora un număr din intervalul $[0..10^9)$. Indicați valoarea maximă pe care o poate avea expresia C/C++: `x%19`. **(4p.)**
   a) 19 b) 0.19 c) 18 d) 52631578

2. Fie funcția de mai jos. Câte caractere '*' se vor afișa dacă se va apela `f(9)`? **(4p.)**

```
void f(int x)
{cout<<"*";    | printf("*");
 if(x>3)
  { f(x-1);
    cout<<x;   | printf("%d",x);
  }
  cout<<"*";   | printf("*");
}
```

   a) 14 b) 13 c) 15 d) 12

3. Utilizând metoda backtracking se generează toate modalitățile de a forma o delegație de 3 sau 4 persoane din mulțimea {Ionel, Gigel, Ina, Elena, Andrei}. Primele trei soluții sunt: {Ionel, Gigel, Ina}, {Ionel, Gigel, Ina, Elena}, {Ionel, Gigel, Ina, Andrei}. Care este a șaptea soluție? **(4p.)**
   a) {Ionel, Ina, Gigel, Andrei}
   b) {Ionel, Ina, Elena}
   c) {Ionel, Ina, Elena}
   d) {Ionel, Ina, Elena, Andrei}

4. Un arbore cu 11 noduri, numerotate de la 1 la 11, este reprezentat prin vectorul de "tați" (8, 5, 10, 7, 0, 2, 8, 5, 5, 2, 9). Indicați lungimea celui mai lung lanț din arbore. **(4p.)**
   a) 3 b) 6 c) 5 d) 4

5. Se dă graful neorientat cu 6 noduri numerotate de la 1 la 6 și muchiile: [1,2], [1,3], [1,6], [2,3], [2,5], [3,4], [4,5], [4,6], [5,6]. Indicați numărul minim de muchii care trebuie adăugate pentru ca graful obținut să fie eulerian. **(4p.)**
   a) 2 b) 0 c) 3 d) 4

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

1. Algoritmul următor este reprezentat în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii numărului natural `a` la numărul natural nenul `b` și cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

[1] Profesor, Colegiul Național „Dinicu Golescu", Câmpulung, mariatatulea@yahoo.com

a) Scrieți valoarea afișată dacă numărul citit este 91. **(6p.)**
b) Care sunt cea mai mică, respectiv cea mai mare valoare pe care o poate lua n în intervalul [1..300] astfel încât algoritmul să afișeze valoarea 11? **(6p.)**
c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieți în pseudocod un algoritm, echivalent cu cel dat, care să folosească o singură structură repetitivă. **(6p.)**

```
citeste n
x ← 1
y ← 2
cat timp x≠0 si y*y≤n executa
|   k ← n
|   cat timp k≥y executa
|   |_  k ← k-y
|   x ← k
|_  y ← y+1
y ← y-1
scrie y
```

2. Variabila e memorează informații pentru fiecare dintre cei 25 de elevi ai unei clase. Ştiind că: e[0].nume reprezintă numele (un șir de maxim 30 de caractere), e[0].medie reprezintă media (un număr real), iar e[0].datan.zi, e[0].datan.luna, e[0].datan.an reprezintă ziua, luna, respectiv anul nașterii (numere naturale) ale primului elev, scrieți definiția unei structuri cu eticheta elev, declarați corespunzător variabila e și scrieți o expresie care va avea valoarea 1 dacă ultimul elev este născut în primele zece zile ale lunii iulie. **(6p.)**
3. Variabilele i și j sunt de tip întreg, iar variabila a memorează un tablou bidimensional cu 8 linii și 8 coloane, numerotate de la 0 la 7, având inițial toate elementele egale cu caracterul @. Fără a utiliza alte variabile, scrieți secvența de instrucțiuni de mai jos, înlocuind punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenței obținute, variabila a să memoreze tabloul alăturat. **(6p.)**

```
for(i=0;i<8;i++)
    for(j=0;j<8;j++)
        ............
```

```
$ ( ( ( ) ) ) $
[ $ ( ( ) ) $ ]
[ [ $ ( ) $ ] ]
[ [ [ $ $ ] ] ]
] ] ] $ $ [ [ [
] ] $ ( ) $ [ [
] $ ( ( ) ) $ [
$ ( ( ( ) ) ) $
```

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare din cerințele următoare.

1. Subprogramul **modifica** primește un număr natural n ∈ $[2, 10^2]$, apoi cele n elemente ale unui tablou unidimensional v, numere întregi din intervalul $[-10^2, 10^2]$, dintre care cel puțin unul este pozitiv și cel puțin unul este negativ. Subprogramul transformă în memorie tabloul, eliminând din componența sa toate numerele negative, apoi inserează între oricare două elemente aflate pe poziții consecutive cel mai mare divizor comun al lor. Tabloul modificat este transmis tot prin parametrul v.

   Exemplu: pentru $n = 10$ și tabloul unidimensional (2, 5, 2, 4, -3, 4, -2, -7, -2, 9), se obține tabloul unidimensional (2, 1, 5, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 1, 9). **(10p.)**
2. Într-un text cu cel mult 200 de caractere, cuvintele sunt formate din litere mici ale alfabetului englez și sunt separate prin câte un spațiu. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un text de tipul menționat și afișează pe ecran, separate de câte o

virgulă, perechile de cuvinte din text cu proprietatea că toate caracterele din al doilea cuvânt se regăsesc în primul cuvânt, în aceeași ordine, nu neapărat pe poziții consecutive. Dacă nu a fost găsită nicio pereche se va afișa mesajul "nu există".

Exemplu: pentru textul
`dupa ore de mers prin pestera, se puteau observa pe tavan forme conice`
se vor afișa perechile
`forme ore`, `pestera se`, `observa se`, `puteau pe`, `pestera pe`. **(10p.)**

3. Se consideră șirul 1, 1, 1, 8, 29, 85, 246, 715 ... definit astfel: $f_1 = f_2 = f_3 = 1$, $f_n = 3 \cdot f_{n-1} - f_{n-2} + 2 \cdot f_{n-3} + 4$ (unde n este un număr natural, $n \geq 4$). Se citesc de la tastatură trei numere naturale x, y, z (numere naturale cu maxim 9 cifre), valorile a trei termeni aflați pe poziții consecutive în șirul dat, și se cere să se scrie în fișierul text **bac.txt**, în ordine descrescătoare, separați prin câte un spațiu, toți termenii șirului care sunt mai mici sau egali cu z. Proiectați un algoritm eficient din punctul de vedere al memoriei utilizate și al timpului de executare.

   Exemplu: dacă se citesc numerele 85 246 715, fișierul bac.txt conține numerele 715 246 85 29 8 1 1 1 .

   a) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**
   b) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**

Testul 2

Cristina Constantinescu [2]

Limbajul C/C++

SUBIECTUL I (20 de puncte)

Pentru fiecare dintre itemii de la 1 la 5, scrieți pe foaia de examen litera corespunzătoare răspunsului corect.

1. Variabila `x` este de tip întreg și poate memora un număr din intervalul `[1000,2000]`. Indicați valoarea minimă pe care o poate avea expresia C/C++: `(x-999)%1000`. **(4p.)**

   a) 0 b) 2 c) 999 d) 1000

2. Subprogramul `f` este definit mai jos. Indicați ce se afișează în urma apelului: `f(9);` **(4p.)**

```
void f(int x)
{ if(x>=2)
  { if(x%2==0) cout<<0; | printf("0");
    f(x/2);
  }
  else cout<<7; | printf("7");
  cout<<x; | printf("%d",x);
}
```

[2] Profesor, Colegiul Național „Zinca Golescu", Pitești, cristina.constantinescu70@gmail.com

a) 91 b) 942 c) 0071 d) 0071249

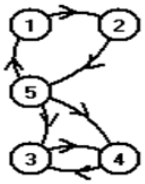
3. Utilizând metoda backtracking, se generează toate meniurile care cuprind câte patru feluri distincte de mâncare din mulțimea {`aperitiv`, `desert`, `legume`, `paste`, `salată`, `supă`}, fiecare meniu respectând următoarele condiții:
   - dacă există `aperitiv`, este servit primul;
   - dacă există `desert`, este servit ultimul;
   - NU sunt servite `legume` și `salată` în același meniu;
   - dacă există `paste` și `supă` în același meniu, `pastele` NU sunt servite înainte de `supă`.

   Două meniuri sunt distincte dacă diferă prin cel puțin un fel de mâncare sau prin ordinea servirii acestora. Primele cinci meniuri generate sunt, în această ordine: (`aperitiv`, `legume`, `paste`, `desert`), (`aperitiv`, `legume`, `supă`, `desert`), (`aperitiv`, `legume`, `supă`, `paste`), (`aperitiv`, `paste`, `legume`, `desert`), (`aperitiv`, `paste`, `salată`, `desert`). Indicați al șaselea meniu generat. **(4p.)**

   a) (`aperitiv`, `salată`, `paste`, `desert`)
   b) (`aperitiv`, `salată`, `supă`, `desert`)
   c) (`aperitiv`, `salată`, `supă`, `paste`)
   d) (`aperitiv`, `supă`, `legume`, `desert`)

4. Un graf orientat cu 5 vârfuri, numerotate de la 1 la 5, este reprezentat în figura de mai jos. Indicați numărul de componente tare conexe ale grafului. **(4p.)**

   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 4



5. Un arbore cu rădăcină are 20 de noduri, dintre care 10 noduri de tip "frunză". Indicați numărul maxim de noduri care au același "tată" în acest arbore. **(4p.)**

   a) 5 b) 7 c) 10 d) 15

SUBIECTUL al II-lea (40 de puncte)

Scrieți pe foaia de examen răspunsul pentru fiecare dintre cerințele următoare.

1. Se consideră algoritmul de mai jos, scris în pseudocod. S-a notat cu `a%b` restul împărțirii numărului natural `a` la numărul natural nenul `b` și cu `[c]` partea întreagă a numărului real `c`.

```
citeste n (numar natural nenul)
m←0
pentru i=1,n executa
|  citeste x (numar natural)
|  cat timp x%10 > [x/10]%10 executa
|  |_ x←[x/10]
|_ m←m+x
daca m>0 atunci scrie m
|_altfel scrie "niciunul"
```

   a) Scrieți ce se afișează dacă se citesc, în această ordine, numerele 5, 127, 2019, 1005, 7, 1900. **(6p.)**
   b) Dacă primul număr citit este 2, scrieți un set de numere distincte din intervalul $[10^3, 10^4)$ care pot fi citite în continuare astfel încât, în urma executării algoritmului, să se afișeze mesajul `niciunul`. **(6p.)**

c) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului dat. **(10p.)**
d) Scrieți în pseudocod un algoritm echivalent cu cel dat, înlocuind adecvat structura `pentru ... execută` cu o structură repetitică de alt tip. **(6p.)**

2. Variabila `c` memorează date specifice unui cerc: coordonatele reale (abscisa și ordonata), în planul xOy, ale centrului cercului, precum și lungimea razei acestuia. Știind că expresiile C/C++: `c.centru.x`, `c.centru.y`, respectiv `c.raza` au ca valori numere reale reprezentând datele specifice ale unui cerc, scrieți definiția unei structuri cu eticheta `figura`, care permite memorarea datelor precizate și declarați corespunzător variabila `c`. **(6p.)**

3. Variabilele `i` și `j` sunt de tip întreg, iar variabila `m` memorează un tablou bidimensional cu `7` linii și `7` coloane, numerotate de la `0` la `6`, cu elemente de tip `char`. Inițial, fiecare element memorează caracterul `*`. **(6p.)**

   Fără a utiliza alte variabile, scrieți secvența de instrucțiuni de mai jos, înlocuind punctele de suspensie astfel încât, în urma executării secvenței obținute, variabila `m` să memoreze tabloul alăturat.

```
for(i=0;i<7;i++)
    for(j=0;j<7;j++)
          ............
```

a	b	c	d	e	f	g
$+$	a	b	c	d	e	f
$+$	$+$	a	b	c	d	e
$+$	$+$	$+$	a	b	c	d
$+$	$+$	$+$	$+$	a	b	c
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	a	b
$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	a

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Subprogramul `multiplu` are un singur parametru, `n`, prin care primește un număr natural (`n`∈[1,104]). Subprogramul returnează cel mai mic multiplu nenul al lui `n` cu proprietatea că este pătrat perfect. Scrieți definiția completă a subprogramului.
   Exemplu: dacă `n=72` sau `n=144`, subprogramul returnează numărul `144`. **(10p.)**

2. Numim `citat` într-un text o secvență de caractere din acel text care începe cu un caracter `<` și se termină cu un caracter `>`, celelalte caractere ale secvenței fiind diferite de `<` și `>`. Un text de cel mult 100 de caractere (litere mici ale alfabetului englez, spații și caracterele `<` și `>`) conține cel puțin un citat. Textul nu conține alte caractere `<` și `>` decât cele care mărginesc citatele, și oricare două citate nu au nici caractere `<` și `>` și nici alte caractere în comun. Scrieți un program C/C++ care citește de la tastatură un text de tipul precizat și îl transformă în memorie prin înlocuirea tuturor literelor mici cuprinse în citate cu literele mari corespunzătoare, celelalte rămânând nemodificate, ca în exemplul de mai jos. Programul afișează pe ecran textul obținut. **(10p.)**
   Exemplu: pentru textul
   `mai bine sa fii un <om de valoare> decat un <om de succes>`
   se afișează
   `mai bine sa fii un <OM DE VALOARE> decat un <OM DE SUCCES>`.

3. Se numește `vârf` într-un șir de numere naturale un termen al șirului care este strict mai mare decât fiecare dintre cei doi termeni vecini cu el, aflați în șir pe poziția din stânga, respectiv din dreapta sa. Fișierul `bac.in` conține un șir de cel mult `106` numere naturale din intervalul [`0`,`109`], separate prin câte un spațiu. Se cere să se afișeze pe ecran vârful din șirul aflat în fișier pentru care valoarea absolută a diferenței dintre cei doi vecini ai săi este minimă. Dacă există mai multe astfel de numere, se afișează cel mai mare dintre ele, iar dacă nu există niciun vârf, se afișează pe ecran mesajul `nu exista`. Proiectați un

algoritm eficient din punctul de vedere al timpului de executare și al spațiului de memorie utilizat.

Exemplu: dacă fișierul conține șirul `2 7 10 5 6 2 1 3 20 17 9 11 7 3 10 6 2` se afișează pe ecran `11`.

a) Descrieți în limbaj natural algoritmul proiectat, justificând eficiența acestuia. **(2p.)**

b) Scrieți programul C/C++ corespunzător algoritmului proiectat. **(8p.)**

PROBLEME DE MATEMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Rezolvarea problemelor pentru liceu din MATINF nr. 3

Clasa a IX-a

M 81. *Fie șirul* $(x_n)_{n\geq 0} \subset [0,\infty)$ *astfel încât* $x_0 = x_1 = 0$ *și*

$$x_{n+2}^2 = 3x_{n+1}^2 - x_n^2 + \frac{1}{n^2},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Demonstrați că $x_n \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 3.$

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție. Demonstrăm prin inducție că $x_{n+1} \geq x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, (1). Afirmația este adevărată pentru $n = 1$ ($x_2 \geq 0$) și $n = 2$ ($x_3^2 = 3x_2^2 + 1$, deci $x_3 \geq x_2$). Presupunem că $x_{k+1} \geq x_k$, unde $k \geq 2$, și avem $x_{k+2}^2 - x_{k+1}^2 = 2x_{k+1}^2 - x_k^2 + \frac{1}{k^2} \geq 0$, deci $x_{k+2} \geq x_{k+1}$.

Rezultă că $x_n \geq x_3$, pentru orice $n \geq 3$. Cum $x_3 \geq 1$ (deoarece $x_3^2 = 3x_2^2 + 1 \geq 1$), obținem că $x_n \geq \frac{2}{n-1},\ \forall n \geq 3$, (2). Folosind (1) și (2), pentru orice $n \geq 3$ avem $x_{n+1}^2 = 3x_n^2 - x_{n-1}^2 + \frac{1}{(n-1)^2} \geq 2x_n^2 + \frac{1}{(n-1)^2} \geq x_n^2 + x_n \cdot \frac{2}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2} = \left(x_n + \frac{1}{n-1}\right)^2$, deci $x_{n+1} \geq x_n + \frac{1}{n-1}$, adică $x_{n+1} - x_n \geq \frac{1}{n-1}$. Astfel pentru orice $n \geq 4$ avem $\sum_{k=3}^{n-1}(x_{k+1} - x_k) \geq \sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{k-1}$, adică $x_n - x_3 \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-2}$. Cum $x_3 \geq 1$, rezultă inegalitatea din enunț.

M 82. *Fie* D, E *și* F *punctele de intersecție ale cercului exînscris triunghiului* ABC *corespunzător laturii* BC *cu* (BC), $(AB$, *respectiv* $(AC$, *iar* P *și* Q *punctele de intersecție ale acestui cerc cu* (BF), *respectiv* (CE). *Arătați că* $\frac{PQ \cdot EF}{PE \cdot QF} = 3.$

Miguel Ochoa Sanchez, Peru

Soluție. Conform *Teoremei lui Ptolemeu* pentru patrulaterul inscriptibil $BEFC$ avem $PQ \cdot EF + PE \cdot QF = PF \cdot EQ$, deci este suficient să arătăm că $\frac{PF \cdot EQ}{PE \cdot QF} = 4$.

Cu notațiile uzuale din $\triangle ABC$, avem $AE = AF = p$, deci $EF = 2p\sin\frac{A}{2}$ și $BF^2 = p^2 + c^2 - 2pc\cos A$. Din $\triangle BEP \sim \triangle BFE$ avem $\frac{p-c}{BF} = \frac{BP}{p-c} = \frac{PE}{2p\sin\frac{A}{2}}$, deci $BP = \frac{(p-c)^2}{BF}$

și $PE = \dfrac{2p \cdot BP \cdot \sin\dfrac{A}{2}}{p-c} = \dfrac{2p(p-c)\sin\dfrac{A}{2}}{BF}$. Analog, $QF = \dfrac{2p(p-b)\sin\dfrac{A}{2}}{CE}$. Prin urmare, avem $PF = BF - BP = BF - \dfrac{(p-c)^2}{BF} = \dfrac{2pc(1-\cos A)}{BF} = \dfrac{4pc\sin^2\dfrac{A}{2}}{BF}$. Analog, $EQ = \dfrac{4pb\sin^2\dfrac{A}{2}}{CE}$. Astfel, obținem $\dfrac{PF \cdot EQ}{PE \cdot QF} = \dfrac{\dfrac{4pc\sin^2\dfrac{A}{2}}{BF} \cdot \dfrac{4pb\sin^2\dfrac{A}{2}}{CE}}{\dfrac{2p(p-c)\sin\dfrac{A}{2}}{BF} \cdot \dfrac{2p(p-b)\sin\dfrac{A}{2}}{CE}} = \dfrac{4bc\sin^2\dfrac{A}{2}}{(p-b)(p-c)} = 4$.

M 83. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$. Demonstrați că*

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} a_k} \geq \sqrt{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i}.$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Inegalitatea dată se scrie, desfășurat, $\sqrt{a_2+a_3+\ldots+a_n} + \sqrt{a_1+a_3+\ldots+a_n} + \ldots + \sqrt{a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}} \geq \sqrt{n-1}\left(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\ldots+\sqrt{a_n}\right)$. Aplicând *Inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwarz* avem $(n-1)\left(a_2+a_3+\ldots+a_n\right) \geq \left(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}\right)^2$, deci

$$(n-1)\sqrt{a_2+a_3+\ldots+a_n} \geq \sqrt{n-1}\left(\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}+\ldots+\sqrt{a_n}\right).$$

Scriind încă $n-1$ relații analoage și adunând rezultă inegalitatea dorită.

M 84. *Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ are loc egalitatea*

$$\sin\frac{\pi}{2^n}\sin\frac{3\pi}{2^n}\sin\frac{5\pi}{2^n}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{\left(2^{n-1}-1\right)\pi}{2^n} = \frac{\sqrt{2}}{2^{2^{n-2}}}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

Soluție. Notăm cu P_n produsul din membrul stâng, adică $P_n = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2^n}$. Avem $P_{n+1} = \prod_{k=1}^{2^{n-1}} \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}} = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}} \cdot \prod_{j=2^{n-2}+1}^{2^{n-1}} \sin\dfrac{(2j-1)\pi}{2^{n+1}}$. Inversând ordinea factorilor în al doilea produs, adică notând $2^{n-1}-j+1=k$, rezultă că $P_{n+1} = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} \sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}} \cdot \prod_{k=1}^{2^{n-2}} \sin\dfrac{(2^n-2k+1)\pi}{2^{n+1}}$. Cum $\sin\dfrac{(2^n-2k+1)\pi}{2^{n+1}} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}\right) = \cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}$, rezultă că $P_{n+1} = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} \left(\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{(2k-1)\pi}{2^{n+1}}\right) = \prod_{k=1}^{2^{n-2}} \left(\dfrac{1}{2}\cdot\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2^n}\right)$, prin urmare $P_{n+1} = \dfrac{1}{2^{2^{n-2}}} \cdot P_n$. Folosind această relație, prin inducție rezultă ușor că $P_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{2^{n-2}}}$, pentru orice $n \geq 2$. Într-adevăr, $P_2 = \sin\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{2^0}}$, iar presupunând că $P_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{2^{n-2}}}$, unde $n \geq 2$, avem $P_{n+1} = \dfrac{1}{2^{2^{n-2}}} \cdot P_n = \dfrac{1}{2^{2^{n-2}}} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2^{2^{n-2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^{2^{n-1}}}$, ceea ce încheie demonstrația.

M 85. *Demonstrați că în orice triunghi neobtuzunghic ABC are loc inegalitatea*

$$(3\sqrt{3}-4)(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)+(2-\sqrt{3})\left(\sqrt{\operatorname{ctg}A}+\sqrt{\operatorname{ctg}B}+\sqrt{\operatorname{ctg}C}\right)^2\geq 2\sqrt{3}.$$

În ce triunghiuri inegalitatea devine egalitate?

Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Notăm $\sqrt{\operatorname{ctg}A}=x$, $\sqrt{\operatorname{ctg}B}=y$ și $\sqrt{\operatorname{ctg}C}=z$. Avem $x,y,z\geq 0$ și $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=1$. Deci inegalitatea din enunț se poate scrie ca $(3\sqrt{3}-4)(x^2+y^2+z^2)+(2-\sqrt{3})(x+y+z)^2\geq 2\sqrt{3}\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}$, (1). Vom demonstra că inegalitatea (1) este adevărată pentru orice numere $x,y,z\geq 0$. Remarcăm că $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=(xy+yz+zx)^2-2xyz(x+y+z)$. Deci dacă fixăm pe $x+y+z$ și $xy+yz+zx$, atunci membrul drept din (1) este descrescător în funcție de variabila xyz. Conform Teoremei 3 de la pag. 41 din RMGO 1/2018 (`http://rmgo.upit.ro`), este suficient să verificăm că (1) este adevărată în următoarele două cazuri:

Cazul 1. $y=z=1$ și $x\in[0,1]$. Avem de arătat că $(3\sqrt{3}-4)(x^2+2)+(2-\sqrt{3})(x+2)^2\geq 2\sqrt{3}\sqrt{2x^2+1}$, inegalitate echivalentă cu $x(x+2\sqrt{3})(x-1)^2\geq 0$, adevărat. Egalitatea are loc pentru $x=0$ sau $x=1$.

Cazul 2. $z=0$. Avem de arătat că $(3\sqrt{3}-4)(x^2+y^2)+(2-\sqrt{3})(x+y)^2\geq 2\sqrt{3}xy$, inegalitate ce se obține folosind *Inegalitatea mediilor* astfel: $(3\sqrt{3}-4)(x^2+y^2)+(2-\sqrt{3})(x+y)^2\geq(3\sqrt{3}-4)\cdot 2xy+(2-\sqrt{3})\cdot 4xy=2\sqrt{3}xy$. Egalitatea are loc pentru $x=y$.

Demonstrația inegalității (1) este încheiată. Cazurile de egalitate în (1) sunt (x,x,x), $(x,x,0)$, $(x,0,x)$ și $(0,x,x)$, deci inegalitatea din enunț devine egalitate pentru triunghiurile echilaterale sau dreptunghice isoscele.

Clasa a X-a

M 86. *Arătați că pentru orice $a,b,c>0$ are loc inegalitatea*

$$9\left(\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{c}}+\sqrt[3]{\frac{c}{a}}\right)-\left(\frac{a^3}{b^3}+\frac{b^3}{c^3}+\frac{c^3}{a^3}\right)\leq 24.$$

Sorin Ulmeanu, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Notând $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}=x$, $\sqrt[3]{\frac{b}{c}}=y$ și $\sqrt[3]{\frac{c}{a}}=z$, inegalitatea din enunț devine $9(x+y+z)-(x^9+y^9+z^9)\leq 24$. Dar, folosind *Inegalitatea mediilor*, avem $x^9+8\geq 9x$, $y^9+8\geq 9y$, $z^9+8\geq 9z$ și prin adunare obținem inegalitatea dorită.

M 87. *Fie $a,b\in(1,\infty)$ astfel încât $ab=4$. Arătați că*

$$\frac{1}{2\log_a(a+1)-1}+\frac{1}{2\log_b(b+1)-1}<1.$$

Dinu Teodorescu, Târgoviște

Soluție. Avem $2\log_a(a+1) > 2\log_a(2\sqrt{a}) = 1 + 2\log_a 2$, deci $\dfrac{1}{2\log_a(a+1)-1} < \dfrac{1}{2\log_a 2} = \dfrac{\log_2 a}{2}$. Astfel $\dfrac{1}{2\log_a(a+1)-1} + \dfrac{1}{2\log_b(b+1)-1} < \dfrac{\log_2 a + \log_2 b}{2} = \dfrac{\log_2(ab)}{2} = \dfrac{\log_2 4}{2} = 1$.

M 88. *Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Rezolvați în $\mathbb{C}$ ecuația $z^n + |z| = 2$.*

Daniel Jinga, Pitești

Soluția 1. Scriind ecuația sub forma $z^n = 2 - |z|$, trecând la modul obținem $|z|^n = \big|2 - |z|\big|$.

Dacă $|z| \leq 2$, rezultă că $|z|^n = 2 - |z|$, adică $|z|^n - 1 + |z| - 1 = 0$, sau, echivalent, $(|z| - 1)\left(|z|^{n-1} + \ldots + |z| + 1\right) = 0$. Cum $|z| \geq 0$, rezultă că $|z| = 1$ și ecuația dată devine $z^n = 1$, deci $z \in U_n$.

Dacă $|z| > 2$, rezultă că $|z|^n = |z| - 2$, adică $|z|\left(|z|^{n-1} - 1\right) + 2 = 0$, fals.

În concluzie, mulțimea soluțiilor ecuației date este $S = U_n$.

Soluția 2 (*Daniel Văcaru*, Pitești). Cu forma trigonometrică $z = r(\cos t + i \sin t)$, unde $r \geq 0$ și $t \in [0, 2\pi)$, ecuația devine $r^n \cos nt + ir^n \sin nt + r = 2$, deci $r^n \cos nt + r = 2$ și $r^n \sin nt = 0$. $r = 0$ nu convine, deci $\sin nt = 0$, de unde $\cos nt = \pm 1$. Obținem $r^n + r = 2$, (1), sau $-r^n + r = 2$, (2). Din monotonia funcției $r \to r^n + r$, (1) are soluția unică $r = 1$. De asemenea, (2) se transformă în $r^n - r + 2 = 0$. Această ecuație nu are soluții, deoarece pentru $r < 1$ avem $r^n - r + 2 = r^n + (1 - r) + 1 > 1$, iar pentru $r \geq 1$ avem $r^n - r + 2 = r\left(r^{n-1} - 1\right) + 2 \geq 2$. Am obținut că $r = 1$ și $\cos nt = 1$. Astfel $t = \dfrac{2k\pi}{n}$ cu $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, iar $z = \cos\dfrac{2k\pi}{n} + i \sin\dfrac{2k\pi}{n}$.

M 89. *Un număr natural nenul n se numește interesant dacă $1^4 + 2^4 + \ldots + n^4$ se divide cu $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Demonstrați că dintre orice cinci numere naturale nenule consecutive se pot alege două interesante.*

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Utilizând formulele $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ și $\sum\limits_{k=1}^{n} k^4 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$, rezultă că n este *interesant* dacă și numai dacă $3n^2 + 3n - 1$ se divide cu 5. Astfel avem echivalențele: n este *interesant* $\Leftrightarrow 3n(n+1) = \mathcal{M}5 + 1$ $\Leftrightarrow n(n+1) = \mathcal{M}5 + 2 \Leftrightarrow n = \mathcal{M}5 + 1$ sau $n = \mathcal{M}5 + 3$.

Rezultă că printre orice cinci numere naturale nenule consecutive există exact două *interesante*, unul de forma $\mathcal{M}5 + 1$ și unul de forma $\mathcal{M}5 + 3$.

M 90. *Arătați că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea*

$$\sqrt{\frac{2ab}{c(a+b)}} + \sqrt{\frac{2bc}{a(b+c)}} + \sqrt{\frac{2ca}{b(c+a)}} \geq 3.$$

Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

Soluție. Vom utiliza următoarele două rezultate.

Lema 1 (*Rădulescu - Maftei*, Gazeta Matematică; o generalizare recentă obținută de *L. Giugiuc* este Problema 485 din Gazeta Matematică Seria A, nr. 3-4/2018). Dacă x, y și z sunt lungimile laturilor unui triunghi ascuțitunghic, atunci $\sqrt{\frac{y+z-x}{x}}+\sqrt{\frac{z+x-y}{y}}+\sqrt{\frac{x+y-z}{z}}\geq 3$.

Lema 2. Dacă a, b și c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci numerele $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$, $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ și $\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$ sunt lungimile laturilor unui triunghi ascuțitunghic.

Demonstrație: Este suficient să arătăm că $\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)^2>\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2$, inegalitate echivalentă cu $\frac{1}{c^2}+\frac{a+b-c}{abc}>0$, adevărat.

Revenind acum la problema dată, concluzia se obține imediat aplicând Lema 1 pentru $x=\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $y=\frac{1}{c}+\frac{1}{a}$ și $z=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$.

Clasa a XI-a

M 91. *Câte soluții are ecuația* $x^{2019}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&3&4&5&6&7&8&1\end{pmatrix}$, $x\in\mathcal{S}_8$*?*

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Notând cu a permutarea din membrul drept, din $x^{2019}=a$ rezultă $ax=xa$, de unde, deoarece permutarea a este un ciclu, deci are ordinul $\text{ord}\,(a)=8$, rezultă că $x=a^k$ cu $k\in\{0,1,\ldots,7\}$ (într-adevăr, dacă $x(1)=k+1$, cu $k\in\{0,1,\ldots,7\}$, atunci $x(1)=a^k(1)$, deci $x(2)=x(a(1))=a(x(1))=a^{k+1}(1)=a^k(2)$ și, analog, $x(3)=a^k(3)$, $\ldots$, $x(8)=a^k(8)$, deci $x=a^k$, care verifică $ax=xa$). Astfel ecuația devine $a^{2019k}=a$, care, deoarece $\text{ord}\,(a)=8$, este echivalentă cu $2019k=\mathcal{M}8+1$. Cum $2019=\mathcal{M}8+3$, această ecuația devine $3k=\mathcal{M}8+1$, cu soluția $k=3$. Rezultă că ecuația dată are soluția unică $x=a^3=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&6&7&8&1&2&3\end{pmatrix}$.

M 92. *Fie* $A,B\in\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ *cu proprietatea că* $A^2+B^2=2AB$*. Arătați că*

$$\det(A+B)^2=8\det(A^2+B^2).$$

Daniel Jinga, Pitești

Soluție. Fie $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $f(x)=\det\left(A^2+B^2+x(AB-BA)\right)=x^3\det(AB-BA)+ax^2+bx+\det(A^2+B^2)$, unde $a,b\in\mathbb{C}$. Avem $f(i)=\det\left(A^2+B^2+iAB-iBA\right)=\det\left((A-iB)(A+iB)\right)$ și $f(-i)=\det\left(A^2+B^2-iAB+iBA\right)=\det\left((A+iB)(A-iB)\right)$. Rezultă că $f(i)=f(-i)$, adică $i\left(b-\det(AB-BA)\right)-a+\det(A^2+B^2)=-i\left(b-\det(AB-BA)\right)-a+\det(A^2+B^2)$, deci $b=\det(AB-BA)$ și astfel $f(x)=bx^3+ax^2+bx+\det(A^2+B^2)$. Dar $f(0)=\det(A^2+B^2)=\det(2AB)$ iar $f(-2)=\det(A^2+B^2-2AB+2BA)=\det(2BA)$. Rezultă

că $f(0)=f(-2)$, adică $\det(A^2+B^2)=-10b+4a+\det(A^2+B^2)$, deci $a=\dfrac{5b}{2}$ și astfel $f(x)=bx^3+\dfrac{5bx^2}{2}+bx+\det(A^2+B^2)$. Atunci $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{b}{8}+\dfrac{5b}{8}-\dfrac{b}{2}+\det(A^2+B^2)=\det(A^2+B^2)$. Pe de altă parte, $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\det\left(A^2+B^2-\dfrac{1}{2}AB+\dfrac{1}{2}BA\right)=\det\left(2AB-\dfrac{1}{2}AB+\dfrac{1}{2}BA\right)=\det\left(\dfrac{3}{2}AB+\dfrac{1}{2}BA\right)=\dfrac{1}{8}\det(3AB+BA)=\dfrac{1}{8}\det(2AB+AB+BA)=\dfrac{1}{8}\det(A^2+B^2+AB+BA)=\dfrac{1}{8}\det(A+B)^2$ și astfel problema este rezolvată.

M 93. *Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ un șir de numere reale pozitive astfel încât șirul $(n^2x_n+nx_n^3)_{n\geq 1}$ este mărginit superior. Arătați că șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ definit prin $y_n=n^3x_n^2+n^2x_n^4$ este convergent și calculați limita sa.*

Dinu Teodorescu, Târgoviște

Soluție. Deoarece șirul $(n^2x_n+nx_n^3)_{n\geq 1}$ este mărginit superior și $n^2x_n, nx_n^3\geq 0$ pentru orice $n\geq 1$, rezultă că șirul $(n^2x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit, deci $nx_n=\dfrac{1}{n}\cdot(n^2x_n)\to 0$ (cazul $0\times$ mărginit). Analog, $y_n=nx_n\,(n^2x_n+nx_n^3)$ converge către 0.

M 94. *Calculați* $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\pi^e)\,(2+\pi^e)\cdot\ldots\cdot(n+\pi^e)}{(1+e^\pi)\,(2+e^\pi)\cdot\ldots\cdot(n+e^\pi)}$.

Florică Anastase, Lehliu Gară

Soluție. Notăm cu x_n șirul din enunț. Folosind inegalitățile cunoscute $\ln x\leq x-1$ pentru orice $x>0$ și $e^\pi>\pi^e$, avem $\ln x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\dfrac{k+\pi^e}{k+e^\pi}\leq\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k+\pi^e}{k+e^\pi}-1\right)=-\left(e^\pi-\pi^e\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k+e^\pi}=-\dfrac{e^\pi-\pi^e}{1+e^\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1+e^\pi}{k+e^\pi}\leq-\dfrac{e^\pi-\pi^e}{1+e^\pi}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\to-\infty$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=-\infty$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

M 95. *Pentru ce valori reale pozitive ale lui k și t inegalitatea*

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}\geq k\cdot\frac{|a-b|^t}{(a+b)^{t-1}}$$

are loc pentru orice numere reale pozitive a și b?

Leonard Giugiuc, România și *Tran Hong*, elev, Vietnam

Soluție. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a+b=2$ (înmulțind inegalitatea dată cu $\dfrac{2}{a+b}$ și notând $a'=\dfrac{2a}{a+b}$, $b'=\dfrac{2b}{a+b}$ se obține aceeași inegalitate, dar în variabilele a', b' și cu $a'+b'=2$). Fie $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}=x$, deci $x\in[1,\sqrt{2})$. Mai mult, $\{a,b\}=\left\{1\pm\sqrt{x^2-1}\right\}$, deci $|a-b|=2\sqrt{x^2-1}$. Inegalitatea dată se rescrie ca $x-1\geq 2k\left(x^2-1\right)^{\frac{t}{2}}$, $\forall x\in[1,\sqrt{2})$, (1). Presupunem prin reducere la absurd că $t<2$. Din (1) avem $(x-1)^{\frac{2-t}{2}}\geq 2k(x+1)^{\frac{t}{2}}$, $\forall x\in(1,\sqrt{2})$, deci $0=\lim\limits_{x\searrow 1}(x-1)^{\frac{2-t}{2}}\geq\lim\limits_{x\searrow 1}2k(x+1)^{\frac{t}{2}}=2k\cdot 2^{\frac{t}{2}}$, fals. Rezultă că $t\geq 2$. În altă ordine de idei, tot din (1) avem $\sqrt{2}-1=\lim\limits_{x\nearrow\sqrt{2}}(x-1)\geq\lim\limits_{x\nearrow\sqrt{2}}2k\left(x^2-1\right)^{\frac{t}{2}}=2k$, deci $k\leq\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

Reciproc, demonstrăm că (1) are loc pentru orice $k \in \left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$ și orice $t \geq 2$. Este suficient să arătăm că $1 \geq 2k(x-1)^{\frac{t-2}{2}}(x+1)^{\frac{t}{2}},\ \forall x \in (1, \sqrt{2})$. Evident, funcția $f(x) = 2k(x-1)^{\frac{t-2}{2}}(x+1)^{\frac{t}{2}}$ este strict crescătoare pe $(1, \sqrt{2})$, deci $f(x) < \lim\limits_{x \nearrow \sqrt{2}} f(x) = 2k\left(\sqrt{2}+1\right)$, $\forall x \in (1, \sqrt{2})$. Dar $2k\left(\sqrt{2}+1\right) \leq 2 \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2} \cdot \left(\sqrt{2}+1\right) = 1$. Demonstrația este completă. În concluzie, $k \in \left(0, \frac{\sqrt{2}-1}{2}\right]$ și $t \geq 2$.

Clasa a XII-a

M 96. *Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție*

$$x * y = (2x+1)\sqrt{\frac{y^2+y+1}{3}} + (2y+1)\sqrt{\frac{x^2+x+1}{3}} - \frac{1}{2},\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

a) Demonstrați că $(\mathbb{R}, *)$ *este un grup abelian izomorf cu grupul* $(\mathbb{R}, +)$.

b) Arătați că $\underbrace{0 * 0 * \ldots * 0}_{\text{de 2019 ori } 0} \in \mathbb{Q}$.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. a) Considerăm funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(e^x - e^{-x})\sqrt{3} - 2}{4}$. Avem $f(x) * f(y) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\sqrt{\left[\frac{(e^y - e^{-y})\sqrt{3}}{4}\right]^2 + \frac{3}{4}} + \frac{e^y - e^{-y}}{2}\sqrt{\left[\frac{(e^x - e^{-x})\sqrt{3}}{4}\right]^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (e^y + e^{-y}) + \frac{e^y - e^{-y}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot (e^x + e^{-x}) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}(e^{x+y} - e^{-x-y}) - \frac{1}{2} = f(x+y),\ \forall x, y \in \mathbb{R}$. Pentru orice $y \in \mathbb{R}$ ecuația $f(x) = y$ are soluția unică $x = \ln \frac{2y + 1 + 2\sqrt{y^2+y+1}}{\sqrt{3}}$, deci f este bijectivă, cu inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \ln \frac{2x + 1 + 2\sqrt{x^2+x+1}}{\sqrt{3}}$. Cum $(\mathbb{R}, +)$ este grup abelian, rezultă că și $(\mathbb{R}, *)$ este grup abelian, iar f este un izomorfism de la $(\mathbb{R}, +)$ la $(\mathbb{R}, *)$.

b) Avem $f^{-1}\big(\underbrace{0 * 0 * \ldots * 0}_{\text{de 2019 ori } 0}\big) = 2019 f^{-1}(0) = 2019 \ln \sqrt{3}$, deci

$$\underbrace{0 * 0 * \ldots * 0}_{\text{de 2019 ori } 0} = f(2019 \ln \sqrt{3}) = \frac{\left[\left(\sqrt{3}\right)^{2019} - \left(\sqrt{3}\right)^{-2019}\right]\sqrt{3} - 2}{4} = \frac{3^{1010} - 3^{-1009} - 2}{4} \in \mathbb{Q}.$$

M 97. *Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ și legea de compoziție $\circ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,*

$$x \circ y = axy - ab(x+y) + b(1+ab),\ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie x_n soluția ecuației $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{de\ 2n+1\ ori\ x} = a^p + b$, unde p este un număr natural fixat. Calculați $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Marin Chirciu, Pitești

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). Se observă că $x \circ y = a\,(x-b)\,(y-b) + b$ și, prin inducție, se arată că $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{\text{de } 2n+1 \text{ ori } x} = a^{2n}\,(x-b)^{2n+1} + b$. Se obține ecuația $a^{2n}\,(x_n-b)^{2n+1} + b = a^p + b$, având soluția $x_n = b + \sqrt[2n+1]{a^{p-2n}}$. Trecând la limită, găsim $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b + \dfrac{1}{a}$.

M 98. *Determinați cel mai mare număr real k pentru care inegalitatea*

$$(a^2+k)(b^2+k)(c^2+k) \le (1+k)^3$$

are loc pentru orice $a, b, c \in [0, \infty)$ astfel încât $a+b+c = 3$.

Leonard Giugiuc, Drobeta Turnu Severin și *Costel Bălcău*, Pitești

Soluție. Considerând funcția $f : [0,3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2+k)$, inegalitatea din enunț este evident echivalentă cu $f(a) + f(b) + f(c) \le 3f(1)$. Avem $f''(x) = \dfrac{2(k-x^2)}{(x^2+k)^2}$.

Cazul 1. $k > 1$. Atunci f este strict convexă pe $[0,3] \cap [0, \sqrt{k}]$. Pentru $k \le 4$ luăm $a = \sqrt{k}$, $b = 1$ și $c = 2 - \sqrt{k}$, iar pentru $k > 4$ luăm $a = 2$, $b = 1$ și $c = 0$. În ambele situații avem $a, b, c \in [0,3] \cap [0, \sqrt{k}]$ și $a+b+c = 3$. Conform *Inegalității lui Jensen* avem $f(a) + f(b) + f(c) > 3f\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right) = 3f(1)$, deci orice $k > 1$ nu verifică proprietatea dată.

Cazul 2. $k = 1$. Atunci luând $a = 3$ și $b = c = 0$ avem $f(a) + f(b) + f(c) = \ln 10 > 3\ln 2 = 3f(1)$, deci nici $k = 1$ nu verifică proprietatea dată.

Cazul 3. $k \in (0,1)$. Atunci f este strict concavă pe $[1,3]$. Vom utiliza următorul rezultat ce extinde *Inegalitatea lui Jensen*:

Teorema funcțiilor semi-convexe (*Vasile Cîrtoaje*, 2004) (Teorema de la pag. 3 din *Mathematical inequalities, Volumul 4: Extensions and refinements of Jensen's inequality*, Editura Universității Petrol-Gaze din Ploiești, 2018; `http://ac.upg-ploiesti.ro/vcirtoaje/math_ineq_4.pdf`) Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, s un punct interior al lui I și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție convexă pe $I \cap (-\infty, s]$ sau pe $I \cap [s, +\infty)$. Atunci inegalitatea $f(a_1) + f(a_2) + \ldots + f(a_n) \ge nf\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)$ are loc pentru orice $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ a.î. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = ns$ dacă și numai dacă $f(x) + (n-1)f(y) \ge nf(s)$ pentru orice $x, y \in I$ a.î. $x + (n-1)y = ns$.

Aplicând această teoremă (pentru funcția $-f$), inegalitatea $f(a)+f(b)+f(c) \le 3f(1)$ are loc pentru orice $a, b, c \in [0, \infty)$ cu $a+b+c = 3$ dacă și numai dacă $2f(t) + f(3-2t) \le 3f(1)$ pentru orice $t \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right]$. Astfel k verifică proprietatea din enunț dacă și numai dacă $g(t) \le g(1)$ pentru

orice $t \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$, unde $g(t) = (t^2+k)^2\left[(3-2t)^2+k\right]$. Avem $g'(t) = 12(t-1)(2t^2-3t+k)(t^2+k) = 24(t-1)(t-t_1)(t-t_2)(t^2+k)$, unde $t_1 = \frac{3-\sqrt{9-8k}}{4}$ și $t_2 = \frac{3+\sqrt{9-8k}}{4}$. Cum $0 < t_1 < 1 < t_2 < \frac{3}{2}$, deducem că $\max\limits_{t\in[0,\frac{3}{2}]} g(t) \in \left\{g(0), g(1), g\left(\frac{3}{2}\right)\right\}$. Deci k verifică proprietatea din enunț dacă și numai dacă $g(0) \leq g(1)$ și $g\left(\frac{3}{2}\right) \leq g(1)$, adică $6k^2-3k-1 \leq 0$ și $24k^2+33k-16 \leq 0$, cu $k \in (0,1)$, adică $k \in \left(0, \frac{\sqrt{33}+3}{12}\right] \cap \left(0, \frac{5\sqrt{105}-33}{48}\right] = \left(0, \frac{5\sqrt{105}-33}{48}\right]$.

În concluzie, cea mai mare valoare a lui k cu proprietatea din enunț este $k = \frac{5\sqrt{105}-33}{48}$.

M 99. *Se consideră funcția $f : [0,\infty) \to [0,1)$ astfel încât*

$$\ln\left(1+\sqrt{f(x)}\right) = x + \ln\left(1-\sqrt{f(x)}\right),\ \forall x \in [0,\infty).$$

a) Demonstrați că ecuația funcțională are soluție.

b) Arătați că f admite primitive.

c) Fie $a, b \in (0,1)$ cu $a < b$. Arătați că $\int_0^{a^{b-1}} f(x)\,dx + \int_0^{b^{1-a}} \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx > 1$.

Floricică Anastase, Lehliu Gară

Soluție (*Daniel Văcaru*, Pitești). a) Putem scrie, echivalent, $\frac{1+\sqrt{f(x)}}{1-\sqrt{f(x)}} = e^x$, deci

$$f(x) = \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \in [0,1),\ \forall x \in [0,\infty).$$

b) Evident, f este continuă, deci admite primitive.

c) Fie funcția auxiliară $g : (0,1) \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{\ln x}{1-x}$, având derivata $g'(x) = \frac{\frac{1-x}{x} + \ln x}{(1-x)^2}$. Fie $h : (0,1] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{1-x}{x} + \ln x$. Avem $h'(x) = \frac{x-1}{x^2} < 0$ pentru orice $x \in (0,1)$, deci h este strict descrescătoare. Pentru orice $x \in (0,1)$ avem $h(x) > h(1) = 0$, prin urmare $g'(x) > 0$, deci g este strict crescătoare. Astfel avem implicațiile $a < b \Rightarrow \frac{\ln a}{1-a} < \frac{\ln b}{1-b} \Rightarrow a^{1-b} < b^{1-a} \Rightarrow 1 < b^{1-a}a^{b-1}$. Cum funcția f este strict crescătoare, bijectivă, cu inversa $f : [0,1) \to [0,\infty)$, $f^{-1}(x) = \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ și $f(0) = 0$, conform *Inegalității lui Young* obținem

$$\int_0^{a^{b-1}} f(x)\,dx + \int_0^{b^{1-a}} \ln\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx \geq a^{b-1}b^{1-a} > 1.$$

M 100. *Fie* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *două funcții derivabile cu derivatele continue astfel încât* $f^2(x) + g^2(x) \neq 0$*, oricare ar fi* $x \in [a, b]$*. Demonstrați că*

$$\int_a^b \sqrt{\frac{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}{f^2(x) + g^2(x)}}\, dx \geq \ln \sqrt{\frac{f^2(b) + g^2(b)}{f^2(a) + g^2(a)}}\,.$$

Cristinel Mortici, Viforâta

Soluție (*Alexandru Daniel Pîrvuceanu*, elev, Drobeta Turnu Severin; *Leonard Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin). Conform *Inegalității Cauchy-Buniakowski-Schwarz* avem

$$\sqrt{[(f'(x))^2 + (g'(x))^2] \cdot [f^2(x) + g^2(x)]} \geq f(x)f'(x) + g(x)g'(x), \forall x \in [a, b].$$

Împărțind această inegalitate cu $f^2(x) + g^2(x) > 0, \forall x \in [a, b]$, obținem

$$\sqrt{\frac{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}{f^2(x) + g^2(x)}} \geq \frac{f(x)f'(x) + g(x)g'(x)}{f^2(x) + g^2(x)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{[f^2(x) + g^2(x)]'}{f^2(x) + g^2(x)}, \forall x \in [a, b].$$

Prin integrarea ultimei inegalități pe $[a, b]$ obținem

$$\int_a^b \sqrt{\frac{(f'(x))^2 + (g'(x))^2}{f^2(x) + g^2(x)}}\, dx \geq \frac{1}{2} \ln(f^2(x) + g^2(x))\Big|_a^b = \ln \sqrt{\frac{f^2(b) + g^2(b)}{f^2(a) + g^2(a)}}.$$

Probleme propuse pentru liceu

Clasa a IX-a

M 121. Demonstrați că oricum s-ar considera patru puncte în interiorul sau pe conturul poligonului $OABCDE$, unde $O(0,0)$, $A(4,0)$, $B(4,2)$, $C(2,2)$, $D(2,4)$ și $E(0,4)$, se pot alege două, notate $M_1(x_1,y_1)$ și $M_2(x_2,y_2)$, astfel încât $|x_1-x_2|+|y_1-y_2|\leq 4$.

Cristinel Mortici, Viforâta

M 122. Fie a,b,c,x,y,z numere reale strict pozitive. Arătați că

$$\frac{1}{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}}+\frac{1}{\frac{y}{a}+\frac{z}{b}+\frac{x}{c}}+\frac{1}{\frac{z}{a}+\frac{x}{b}+\frac{y}{c}}\leq\frac{a+b+c}{x+y+z}.$$

Când are loc egalitatea?

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 123. Arătați că pentru orice $n,x,y,z>0$ are loc inegalitatea

$$\frac{n(n+3)(x+y)+3}{x+y+(n+1)z}+\frac{n(n+3)(y+z)+3}{y+z+(n+1)x}+\frac{n(n+3)(z+x)+3}{z+x+(n+1)y}\geq 6n+\frac{27}{(n+3)(x+y+z)}.$$

Daniel Jinga, Pitești

M 124. Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ și $a_1,a_2,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $0<a_1\leq a_2\leq\ldots\leq a_n$. Arătați că

$$\frac{n(n-1)}{2}\leq\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{3a_i^2-2a_ia_j+3a_j^2}{(a_i+a_j)^2}\leq\frac{3n(n-1)}{8}\left(\frac{a_1}{a_n}+\frac{a_n}{a_1}-\frac{2}{3}\right).$$

Sorin Ulmeanu, Pitești și *Nicolae Papacu*, Slobozia

M 125. Se consideră un cerc de centru O și rază R, A un punct exterior cercului și B,C,D,E patru puncte distincte situate pe cerc astfel încât $B\in(OA)$, $C\in(AD)$, $AC=R$ și $O\in(DE)$. Notăm cu x lungimea segmentului AB.

a) Arătați că $2m(\sphericalangle BCE)=3m(\sphericalangle BAD)$.

b) Calculați $\dfrac{R}{x}$ astfel încât $\triangle ADE$ să fie echilateral.

c) Calculați $\dfrac{R}{x}$ astfel încât $[AB]\equiv[CD]$.

Thanos Kalogerakis, Grecia

M 126. Demonstrați că în orice triunghi ABC avem:

a) $$\frac{(1+ab)(a+b)}{(1+a^2)(1+b^2)}+\frac{(1+bc)(b+c)}{(1+b^2)(1+c^2)}+\frac{(1+ca)(c+a)}{(1+c^2)(1+a^2)}\leq\frac{p^2+r^2-2Rr}{4Rr};$$

b) $$\frac{(1+r_ar_b)(r_a+r_b)}{(1+r_a^2)(1+r_b^2)}+\frac{(1+r_br_c)(r_b+r_c)}{(1+r_b^2)(1+r_c^2)}+\frac{(1+r_cr_a)(r_c+r_a)}{(1+r_c^2)(1+r_a^2)}\leq\frac{2R-r}{r}.$$

Mihály Bencze, Brașov

Clasa a X-a

M 127. Fie k un număr real fixat. Determinați mulțimea

$$M_k = \left\{ 2\left(b^2+c^2\right) - a^2 \;\middle|\; a \geq b \geq c \geq 0,\ a+b+c=6,\ a^2+b^2+c^2=k \right\}.$$

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

M 128. Arătați că $\log_2 3 + \log_4 5 + \log_6 7 + \ldots + \log_{14} 15 > 7\sqrt[7]{2}$.

Dorin Mărghidanu, Corabia

M 129. Calculați suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(3k^3+9k^2+11k+4\right) C_{2k+1}^{k}}{k+2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Mihály Bencze, Brașov

M 130. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$ numere complexe distincte două câte două și având modulele egale. Dacă $|z_1-z_2| = |z_4-z_5| = |z_7-z_8| = |z_{10}-z_{11}|$, $|z_2-z_3| = |z_5-z_6| = |z_8-z_9| = |z_{11}-z_{12}|$, $|z_3-z_4| = |z_6-z_7| = |z_9-z_{10}| = |z_{12}-z_1|$ și punctele de afixe $z_1, z_2, \ldots, z_{12}$ sunt, în această ordine, vârfurile unui poligon convex, atunci arătați că $z_1+z_2+\ldots+z_{12}=0$.

Sorin Ulmeanu, Pitești

M 131. Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația

$$n \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{n} + n \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{3\pi}{n} = 10\sqrt{10n}.$$

Ionel Tudor, Călugăreni

M 132. Fie ABC un triunghi, I centrul cercului înscris în triunghiul ABC, iar D, E și F punctele de intersecție ale acestui cerc cu segmentele (IA), (IB), respectiv (IC). Arătați că:

a) $\dfrac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} \geq 4$; b) $\dfrac{\mathcal{P}_{ABC}}{\mathcal{P}_{DEF}} \geq 2$.

Sorin Borodi, Dej

Clasa a XI-a

M 133. Fie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ și $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $A^3 = (a-1)A^2 + (a+b)A + bI_n$ și $\det(A + I_n) \neq 0$. Calculați $\det(A^4 - 2aA^3 + (a^2 + c + d)A^2 - a(c+d)A + cdI_n)$.

Marin Chirciu, Pitești

M 134. Fie $p, q, n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $p < q \leq n+1$ și fie $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ numere distincte două câte două. Pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ notăm $s_k = \sum_{i=1}^{n} a_i^k$ și $t_k = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^{q+k} - a_i^{p+k}}{a_i - 1}$. Rezolvați în $\mathbb{R}^n$ sistemul

$$\begin{cases} s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n = t_1 \\ s_2x_1 + s_3x_2 + \ldots + s_{n+1}x_n = t_2 \\ \ldots \\ s_nx_1 + s_{n+1}x_2 + \ldots + s_{2n-1}x_n = t_n \end{cases}.$$

Stelian Corneliu Andronescu, *Costel Bălcău*, Pitești și *Leonard Mihai Giugiuc*, Drobeta Turnu Severin

M 135. Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ definit prin

$$x_n = \frac{2C_{n+1}^2 \cos\frac{\pi}{2n+1} + 3C_{n+1}^3 \cos\frac{3\pi}{2n+1} + 4C_{n+1}^4 \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots + (n+1)C_{n+1}^{n+1} \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}{C_n^1 \sin\frac{\pi}{2n+1} + C_n^2 \sin\frac{3\pi}{2n+1} + C_n^3 \sin\frac{5\pi}{2n+1} + \ldots + C_n^n \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n+1}}$$

este convergent și calculați limita sa.

Mihai Florea Dumitrescu, Potcoava și *Costel Bălcău*, Pitești

M 136. Arătați că $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{e^{2k}} \leq \frac{1}{4}$.

Sladjan Stankovik, Macedonia de Nord

M 137. Fie S suma soluțiilor din intervalul $(0, 2\pi)$ ale ecuației $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x} = 3^{\sin x}$.

Arătați că $S \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Daniel Jinga, Pitești

M 138. Rezolvați în $\mathbb{R}^3$ sistemul $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)\left(y^2 + \frac{1}{2}\right)\left(z^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{169 - 15\sqrt{5}}{64} \end{cases}$.

Florentin Vișescu, București

Clasa a XII-a

M 139. Arătați că nu există $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ astfel încât inelul claselor de resturi $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ să aibă exact 2020 de elemente inversabile.

Stelian Corneliu Andronescu și *Costel Bălcău*, Pitești

M 140. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Demonstrați că cel mai mare divizor comun al polinoamelor $f = X^n + aX + b$ și $g = X^{n+1} + cX + d$ este un polinom de grad mai mic sau egal cu 2.

Cristinel Mortici, Viforâta

M 141. Fie $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 1$. Calculați integrala

$$I = \int_1^{2a-1} \frac{\left(1 + \sqrt{x^2 - 2ax + a^2 + 1}\right)\left(1 + \sqrt[3]{(x-1)(x-a)(x-2a+1)\cos \pi x}\right)}{x^2 - 2ax + a^2 + 1}\, dx.$$

Marin Chirciu, Pitești

M 142. Fie $f : [0, 2] \to [0, \infty)$ o funcție derivabilă și crescătoare. Arătați că

$$4 \int_1^2 f(x)\, dx \leq 4 \int_1^2 x^2 f(x)\, dx - \int_0^2 x^2 f(x)\, dx.$$

Daniel Jinga, Pitești

M 143. Fie a, b, c și d numere reale nenegative. Arătați că

$$\sqrt{\sum (a-b)^2} + 4\sqrt[3]{\frac{abc + abd + acd + bcd}{4}} \geq a + b + c + d,$$

unde $\sum (a-b)^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2$.

Când are loc egalitatea?

Leonard Mihai Giugiuc, Drobeta Turnu Severin

M 144. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(a, b) = \dfrac{(a+b+2)^2}{a^2 + b^2 + 2}$. Determinați valorile $k \in \mathbb{R}$ pentru care inegalitatea

$$(a+b+2)^2(ab + 2a + 2b + 1)^2 \geq 144ab(a^2 + b^2 + 2)$$

are loc pentru orice numere reale a și b astfel încât $f(a, b) = k$.

Michael Rozenberg, Israel și *Leonard Mihai Giugiuc*, România

PROBLEME DE INFORMATICĂ PENTRU CONCURSURI

Probleme propuse

Clasa a IX-a

I 61 (**numar prim**)**.** Se dă N număr natural cu maxim 100 de cifre. Se cere să se determine cel mai mare număr mai mic sau egal cu N care are suma cifrelor un număr prim.

Exemplu
Pentru $N = 1107$ se va afișa: 1105.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 62 (**deosebit**)**.** Un număr natural cu cifre distincte se numește **deosebit** dacă fiecare cifră a sa divide suma celorlalte.

Exemple
246 este număr **deosebit** pentru că: 2 divide $4 + 6$, 4 divide $2 + 6$, 6 divide $2 + 4$.
1236 este număr **deosebit** pentru că: 1 divide $2 + 3 + 6$, 2 divide $1 + 3 + 6$, 3 divide $1 + 2 + 6$, 6 divide $1 + 2 + 3$.

Cerință
Pentru un număr natural dat, cu cifre distincte, se cere să se verifice dacă este sau nu **deosebit**. De exemplu, pentru numărul `1236` se va afișa `DA`, iar pentru numărul `1246` se va afișa `NU`.

Marian Teler, Costești

I 63 (**spadă**)**.** La un turneu de spadă s-au înscris n spadasini. Organizatorii turneului au hotărât că fiecare spadasin trebuie să se dueleze cu toți ceilalți, dar o singură dată pe zi (în scopul dozării efortului). Turneul trebuie să se desfășoare într-un număr minim de zile (pentru a nu se exagera cu cheltuielile de cazare) și nu există zi liberă pentru niciun spadasin.

Cerință

Să se determine modul de organizare a turneului, adică ce dueluri se desfășoară în fiecare zi. Spadasinii sunt identificați după numerele de ordine $1, 2, \ldots, n$.

Date de intrare

Numărul natural nenul n se găsește pe prima linie a fișierului de intrare `spada.in` și este număr par.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `spada.out` va conține modul de desfășurare a turneului. Dacă pentru acesta sunt necesare k zile atunci în fișier se vor găsi k perechi de linii. Prima linie a fiecărei perechi conține cuvântul "Ziua" urmat de un număr de ordine al zilei, separate de un spațiu. Prima zi are numărul de ordine 1 iar cuvântul "Ziua" începe cu o majusculă.
Cea de-a doua linie a perechii conține duelurile care se desfășoară în ziua respectivă. Sintaxa

este:
spadasin_1 – spadasin_2 spadasin_3 – spadasin_4 ... spadasin_{n-1} – spadasin_n
unde spadasin_i este o valoare din mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cei doi spadasini care sunt la stânga și la dreapta caracterului "-" (adică minus) reprezintă cei doi spadasini care se vor duela. Caracterul „-" este precedat și urmat de câte un spațiu iar perechile de spadasini care dispută duelul, de asemenea sunt separate prin câte un spațiu.

Restricții și precizări

- $2 \leq n \leq 100$
- n este număr par

Exemplu

`spada.in`	`spada.out`	Explicație
`4`	Ziua 1 1 - 3 2 - 4 Ziua 2 1 - 2 3 - 4 Ziua 3 1 - 4 2 – 3	Sunt necesare 3 zile, o modalitate de organizare fiind cea prezentată.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 8 MB.

Marin Cristea, Pitești

I 64 (**cifra**). Se dă un tablou pătratic de dimensiune n cu elemente numere naturale. Determinați cifra k care se găsește în cât mai multe numere din tablou. Dacă există mai multe astfel de cifre, k va fi cea mai mare dintre ele.

Cerință

Dându-se n și un tablou pătratic de dimensiune n cu elemente numere naturale, se cere k cu proprietățiile din enunț.

Date de intrare

Numărul natural nenul n se găsește pe prima linie a fișierului de intrare `cifra.in`, iar elementele tabloului pe n linii, separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `spada.out` va conține cifra k cu proprietățiile din enunț.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$
- Elemente tabloului sunt numere naturale cu maxim 17 cifre

Exemplu

`cifra.in`	`cifra.out`	Explicație
`3` 23 1055 71 85623 99 5522 22 55 525	5	Cifrele 2 si 5 se găsesc într-un număr maxim de elemente, rezultă $k = 5$ pentru că 5 este cel mai mare dintre 2 și 5.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 65 (**FIBO**). Fie un tablou bidimensional cu m linii și n coloane, iar elementele sunt numere naturale. Determinați indicele cel mai mic de linie cu proprietatea **FIBO** (notat cu k). Indicii liniilor incep cu 1, iar o linie are proprietatea **FIBO** dacă toate elementele sale sunt termeni din șirul lui Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots)$.

Cerință

Pentru un tablou bidimensional cu m linii și n coloane dat, se cere k cu proprietatea din enunț.

Date de intrare

Fișierului de intrare `FIBO.in` conține pe prima linie m și n separate printr-un spațiu, iar pe următoarele m linii elementele tabloului separate prin câte un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `FIBO.out` va conține cifra k cu proprietatea din enunț.

Restricții și precizări

- $1 \leq m, n \leq 40$
- Elemente tabloului sunt numere naturale cu maxim 17 cifre

Exemplu

`FIBO.in`	`FIBO.out`	Explicație
`3 3` 18 55 71 1 13 2 2 5 8	2	Prima linie numai cu elemente din șirul lui Fibonacci este cu indicele 2.

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

Clasa a X-a

I 66 (**similar**). **Definiție:** Două cuvinte distincte sunt `similare` dacă au același număr de litere distincte și numărul de vocale distincte din componența lor este un număr par.
De exemplu, cuvintele `care` și `arce` sunt cuvinte `similare`, deoarece au același număr de litere distincte și au două vocale distincte. La fel, cuvintele `ani` și `anii` sunt cuvinte similare.

Cerință

Dându-se un text pe mai multe linii, determinați toate grupările de cuvinte distincte `similare` din text. O grupare poate avea minim două cuvinte. Cuvintele textului sunt despărțite prin: virgulă (,), spațiu (‘ ‘), punct și virgulă (;) sau punct (.).

Date de intrare

Din fișierul text `similar.in` se citește textul dat. Textul dat poate fi pe mai multe linii ale fișierului text, iar fiecare linie a textului se termină cu caracterul ENTER.

Date de ieșire

În fișierul de ieșire `similar.out` se va afișa pe prima linie un singur număr natural **ng**, reprezentând numărul de grupări de cuvinte similare din textul dat, iar pe următoarele **ng** linii ale fișierului se vor afișa grupările de cuvinte similare, pe fiecare linie a fișierului afișându-se cuvintele unei singure grupări despărțite prin câte un spațiu. Grupările de cuvinte similare se vor afișa în ordinea aparițiilor din text.

Restricții și precizări

- Fiecare linie a textului poate conține maxim 300 de caractere, fiecare cuvânt din text are maxim 30 de caractere, iar textul conține cel mult 100 de linii
- Textul va conține doar litere mici ale alfabetului englez

ar litere mici ale alfabetului englez.

Exemplu

`similar.in`	`similar.out`	Explicație
cei mai frumosi ani sunt anii de liceu. care are arce multe are si ace la fel de multe. ion are un cojoc nou, dar are și ghete noi.	3 ani anii care arce ion noi	Cuvântul are se găsește de două ori în textul dat, dar fiind două cuvinte identice, ele nu pot forma o grupare de cuvinte similare.

Timp maxim de execuție: 0.2 sec./test. Memorie totală disponibilă 3 MB.

Adriana Oprea, Pitești

I 67 (codtel). Un telefon are un cod de intrare format din patru cifre. Codul este format din primele 4 cifre ale unui număr natural X. Dându-se un cuvânt, notat cu s, X reprezintă numărul de submulțimi ale mulțimii literelor cuvântului dat. Dacă X are mai puțin de 4 cifre, atunci în fața lui se vor pune atâtea cifre de 0 cât este nevoie.

Cerință

Pentru un cuvânt s dat, determinați cele 4 cifre ale codului de intrare în telefon.

Date de intrare

Fișierul de intrare `codtel.in` conține pe prima linie cuvântul s.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `codtel.out` va conține pe prima linie secvența de cifre necesară deschiderii telefonului.

Restricții și precizări

- Cuvântul s are maxim 1000 de litere
- Cuvântul s este format numai din litere mici

Exemplu

codtel.in	codtel.out
valea	0016

Timp maxim de execuție: 0.1 secunde/test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

I 68 (**codificare**). Pentru transmiterea unor texte codificate se folosesc literele din configurația de mai jos:

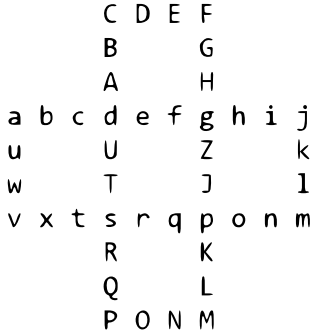


Fig. 1: Așezarea literelor pentru codificare

În această configurație se formează cinci pătrate pe care le vom numerota astfel: 1 pătratul de sus, 2 pătratul din stânga, 3 pătratul din mijloc, 4 pătratul din dreapta, respectiv 5 pătratul de jos. Pentru pătratele configurației se stabilește o ordine și un sens de rotire al fiecăruia.
Codificarea unui text se face prin codificarea fiecărui caracter în parte, în ordinea în care apar în text, astfel:
- Înainte de codificarea fiecărui caracter, caracterele fiecărui pătrat din configurația anterioară se rotesc, în ordinea și sensurile precizate, cu o poziție. Inițial se pornește de la configurația dată.
- Ulterior, pentru codificarea unui caracter se va folosi configurația rezultată după codificarea caracterului anterior.
- Prin codificare, unui caracter din configurația inițială îi va corespunde caracterul de pe aceeași poziție din configurația finală.

Cerință

Pentru un text, care conține cel mult 1000 de caractere existente în configurația dată, se cere sa se obțină codificarea acestuia.

Date de intrare

Fișierul de intrare `codificare.in` conține 3 linii:
p1 p2 p3 p4 p5 - numerele asociate pătratelor în ordinea rotirii lor
s1 s2 s3 s4 s5 - sensul de rotire al caracterelor p1, p2, p3, p4, p5 (1 - rotire spre dreapta, 0 - rotire spre stânga)
textul - secvența de caractere ce urmează a fi codificată

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `codificare.out` va conține pe o singură linie textul codificat.

Restricții și precizări

- Textul pentru codificare are maxim 1000 de caractere, aflate în figura de mai sus

Exemplu

codificare.in	codificare.out
1 2 4 5 3 1 1 0 1 1 Cbfxb	Bafta

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 69 (**permnefixe**)**.** Se dau n și k două numere naturale. Prin permutare fară puncte fixe înțelegem o permutare a mulțimii $\{1, 2, \ldots, n\}$ în care orice element al ei este diferit de poziția pe care se află. De exemplu pentru $n = 4$ permutările $(2, 1, 4, 3)$ și $(3, 1, 4, 2)$ nu au puncte fixe. Dintre toate permutările fără puncte fixe ne interesează a k-a permutare a mulțimii în ordine lexicografică.

Cerință

Pentru n și k date se cere a k-a permutare fără puncte fixe în ordine lexicografică.

Date de intrare

Fișierul de intrare `permnefixe.in` conține pe prima linie n și k separate printr-un spațiu.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `permnefixe.out` va conține pe prima linie a k-a permutare fără puncte fixe în ordine lexicografică; elementele ei vor fi separate prin câte un spațiu. Dacă nu există o astfel de permutare se va scrie cifra 0.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 20$
- $1 \leq k \leq 200$

Exemplu

permnefixe.in	permnefixe.out
4 2	2 3 4 1

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Ion Alexandru Popescu, București

I 70 (**zerouri**)**.** Se dă n, număr natural. Notăm cu Nr numărul de funcții bijective de forma $f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, ..., n\}$.

Cerință

Pentru n dat afișați numărul de zerouri în care se termină Nr.

Date de intrare

Fișierul de intrare `zerouri.in` conține pe prima linie n.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `zerouri.out` va conține numărul de zerouri în care se termină Nr.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 10000$

Exemplu

zerouri.in	zerouri.out
23	4

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

Clasele XI-XII

I 71 (bijuterii). Doi hoți au ajuns la sapă de lemn, motiv pentru care se hotărăsc să spargă singura bancă din oraș. În momentul implementării planului, ei constată însă că în loc de bani au găsit bijuterii. Cum cei doi aveau nevoie de bani, au hotărât să ducă toate bijuteriile altei persoane cu preocupări asemănătoare. După o evaluare temeinică a bijuteriilor conform cerințelor pieței, ei au primit o listă a prețurilor pentru fiecare bijuterie.

Cerință

Ajutați cei doi hoți aflați în pragul disperării să își împartă cât mai egal sumele obținute pe bijuterii.

Date de intrare

Fișierul de intrare `bijuterii.in` conține pe prima linie numărul n de bijuterii iar pe cea de-a doua linie prețurile bijuteriilor.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `bijuterii.out` va conține pe prima linie două valori ce reprezintă suma prețurilor obținute de cei doi hoți. Pe următoarea linie se găsesc prețurile bijuteriilor primului hoț iar pe ultima linie prețurile celui de-al doilea hoț.

Restricții și precizări

- Numărul maxim de bijuterii este 800
- Prețul maxim al unei bijuterii este 1000
- Cele două liste de prețuri din fișierul de ieșire vor fi în ordine crescătoare
- Primul hoț va primi o sumă cel mult egală cu cea a prietenului lui

Exemplu

bijuterii.in	bijuterii.out
7 28 7 11 8 9 7 27	48 49 9 11 28 7 7 8 27

Timp maxim de execuție: 0.4 sec./test. Memorie totală disponibilă 32 MB.

Marin Cristea, Pitești

I 72 (**seif**). Un seif se poate deschide cu ajutorul unei secvențe de cifre. Secvența de cifre este formată din cifrele unui număr natural Nr. Dându-se un cuvânt, notat cu c, Nr reprezintă numărul de cuvinte de lungime maximă formate numai cu litere distincte ale cuvântului dat.

Cerință

Pentru un cuvânt c dat, determinați secvența de cifre necesară deschiderii seifului (cifrele lui Nr).

Date de intrare

Fișierul de intrare `seif.in` conține pe prima linie cuvântul c.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `seif.out` va conține pe prima linie secvența de cifre necesară deschiderii seifului.

Restricții și precizări

- Cuvântul c are maxim 1000 litere
- Cuvântul c este format numai din litere mici

Exemplu

seif.in	seif.out
sinaia	24

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Constantin, Pitești

I 73 (**pavari**). Se dă un dreptunghi cu lungimea egală cu $2N$ decimetri și lățimea egală cu 3 decimetri.

Cerință

Să se determine numărul M al pavărilor distincte ale dreptunghiului dat cu dale dreptunghiulare care au lățimea egală cu un decimetru și lungimea egală cu 2 decimetri.

Date de intrare

Fișierul de intrare `pavari.in` conține pe prima linie numărul N, reprezentând jumătatea lungimii dreptunghiului.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `pavari.out` va conține numărul M reprezentând numărul modalităților de a pava dreptunghiul.

Restricții și precizări

- $1 \leq N \leq 100$

Exemplu

pavari.in	pavari.out
2	11

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 74 (**drum**). În regatul XLand orașele erau înconjurate de ziduri în formă de poligoane convexe. Împăratul a dispus construirea unui drum de legătură directă între capitală și un alt oraș dat. Fiecare extremitate a drumului poate fi orice punct situat pe zidul orașului, respectiv capitalei. Lungimea drumului este distanța dintre extremitățile sale.

Cerință

Determinați cel mai scurt drum dintre capitală și orașul dat.

Date de intrare

Fișierul de intrare `drum.in` conține:
Linia 1: K1 - număr natural nenul, reprezentând numărul de colțuri ale zidurilor capitalei;
Linia 2: x_1 y_1 x_2 y_2 ... x_{K1} y_{K1} - K1 perechi de numere întregi, separate prin câte un spațiu, reprezentând coordonatele vârfurilor zidurilor capitalei;
Linia 3: K2 - număr natural nenul, reprezentând numărul de colțuri ale zidurilor orașului dat;
Linia 4: x_1 y_1 x_2 y_2 ... x_{K2} y_{K2} - K2 perechi de numere întregi, separate prin câte un spațiu, reprezentând coordonatele vârfurilor zidurilor acestui oraș.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `drum.out` va conține o singură linie cu numerele:
x1 y1 x2 y2 - patru numere reale trunchiate la 4 zecimale, separate prin câte un spațiu, reprezentând extremitățile unui drum minim.

Restricții și precizări

- $1 \leq K1, K2 \leq 20$
- Coordonatele vârfurilor zidurilor ce înconjoară orașul, respectiv capitala sunt numere întregi aparținând intervalului [-100,100] și sunt date fie în ordinea deplasării acelor de ceasornic, fie în sens invers deplasării acelor de ceasornic
- Capitala și orașul nu au niciun punct comun (nu au puncte interioare comune și nu au puncte comune pe zidurile lor)

Exemplu

drum.in	drum.out
4 3 4 3 2 5 2 5 4 4 8 3 8 6 11 6 11 3	5 3.5 8 3.5

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Doru Anastasiu Popescu, Pitești

I 75 (arbori). Se dă un graf neorientat prin numărul de noduri n, numărul de muchii m și m perechi de numere reprezentând extremitățile muchiilor.

Cerință

Verificați dacă graful dat este bipartit complet și în caz afirmativ determinați numărul de arbori parțiali modulo 9991.

Date de intrare

Fișierul de intrare `arbori.in` conține pe prima linie n si m separate printr-un spațiu, iar pe următoarele m linii perechi de numere separate prin câte un spațiu, reprezentând muchiile grafului neorientat.

Date de ieșire

Fișierul de ieșire `arbori.out` va conține pe prima linie unul dintre cuvintele DA sau NU, în funcție de situația graf bipartit complet sau graf care nu este bipartit complet. În cazul în care pe prima linie s-a scris DA, atunci pe linia a doua se va scrie numărul de arbori parțiali modulo 9991.

Restricții și precizări

- $1 \leq n \leq 100$

Exemplu

arbori.in	arbori.out
5 6 1 2 1 4 1 5 3 2 4 3 3 5	DA 12

Timp maxim de execuție: 0.1 sec./test. Memorie totală disponibilă 2 MB.

Costel Bălcău, Pitești

ISTORIOARE DIN LUMEA MATEMATICII ȘI A INFORMATICII

Carl Friedrich Gauss, ,,. . .teoria numerelor este regina matematicii"

Stelian Corneliu Andronescu [1]

Carl Friedrich Gauss s-a născut la 30 aprilie 1777 în Braunschweig și a decedat la 23 februarie 1855 în Göttingen. Genialul matematician a spus: ,,matematica este regina științelor, iar teoria numerelor este regina matematicii", un adevăr ușor de acceptat și greu de contestat.

Vom puncta câteva aspecte din viața și din deosebita sa activitate științifică.

Un adevărat geniu în matematică, Gauss știa să adune încă de la vârsta de trei ani, când a început să corecteze socotelile tatălui său. C.F. Gauss a fost nevoit să învețe singur calculul algebric, deoarece părinții săi nu aveau posibilitatea de a se ocupa de educația lui. În 1792, cu aprobare de la Ducele de Braunschweig, a intrat la Colegiul Carolinum, iar în 1795 la Universitatea Göttingen.

Marele matematician a scris lucrări în mai multe domenii, precum matematică și fizică, dar și geodezie și astronomie. Lui Gauss îi datorăm metoda ,,construirii unui poligon cu 17 laturi folosind numai rigla și compasul". Opera sa se axează pe teoria numerelor, fiind considerat creatorul acestui domeniu. A studiat teoria congruențelor făcând distincție între congruențele algebrice și cele transcendente și indicând o metodă directă pentru rezolvarea congruențelor binome; de asemenea a dat prima demonstrație riguroasă a legii de reciprocitate pătratică în anul 1825. În algebră, în teza de doctorat a demonstrat teorema fundamentală a algebrei. În anul 1801 a publicat cartea ,,Disquisitiones Arithmeticae", un studiu sistematic al teoriei numerelor, lucrare ce a stat la bazele dezvoltării moderne a acestei teorii.

În lumea matematicii a rămas faimos următorul dialog de la distanță dintre Carl Fiederich Gauss și Niels Henrich Abel. Abel spune despre Gauss că este ca vulpea care își șterge urmele din nisip cu coada. Replica lui Gauss a fost: niciun arhitect care se respectă nu lasă schela după ce și-a finalizat clădirea.

În anul 1807, genialul matematician va pleca la Göttingen, preluând postul de Director al Observatorului, motivul plecării fiind uciderea în luptă a Ducelui de Braunschweig. Redăm în continuare citatul din prefața cărții ,,Disquisitiones Arithmeticae", din care reiese recunoștința lui Gauss față de binefăcătorul său, dar și pasiunea extraordinară pentru matematică.

SERENISIMULUI PRINȚ ȘI LORD CHARLES WILLIAM FERDINAND
DUCE DE BRAUNSCHWEIG Şl LÜNEBURG
PREALUMINATE PRINŢ,

[1]Lect. univ. dr., Universitatea din Pitești, corneliuandronescu@yahoo.com

Consider că cel mai mare noroc al meu este că îmi permiteți să înnobilez lucrarea mea cu prea onorabilul DUMNEAVOASTRĂ nume. Fără favoarea pe care mi-ați acordat-o, Prealuminate Prinț, eu nu aș fi avut șansa de a deveni om de știință. Fără ajutorul DUMNEAVOASTRĂ inestimabil în susținerea studiilor mele nu aș fi avut posibilitatea de a mă dedica în întregime dragostei mele pasionale, studiul matematicii. Mărinimia DUMNEAVOASTRĂ m-a scutit de orice griji, permițându-mi să dedic mulți ani studiilor și meditațiilor în domeniul matematicii și, în final, oferindu-mi prilejul de a prezenta semenilor mei, prin volumul de față, câteva din rezultatele cercetărilor mele. Mai mult decât atât, generozitatea DUMNEAVOASTRĂ a fost aceea care a înlăturat și obstacolele ce întârziau, nejustificat, publicarea ei. Mărinimiei DUMNEAVOASTRĂ, care mă copleșește și îndatorează mai mult decât pot spune, nu-i pot răspunde pe măsură prin această lucrare; dar râvna mea în a încerca să precumpănesc Generozitatea DUMNEAVOASTRĂ nu se va opri aici.

Ştim cu toții că nu ați văduvit de înalta DUMNEAVOASTRĂ protecție nicio știință, nici măcar pe acelea care, în ochii unora, par prea abstracte și îndepărtate de viața de zi cu zi, deoarece DUMNEAVOASTRĂ însivă, prin suprema DUMNEAVOASTRĂ înțelepciune, sunteți un excelent cunoscător al legăturilor intime ce unesc toate științele, științe care permit prosperitatea societății omenești. Publicarea acestei cărți se vrea deci o dovadă a profundului respect pe care Vi-l port, un omagiu personal celei mai frumoase științe. Prealuminate Prinț, dacă veți avea bunăvoința să considerați această lucrare demnă de extraordinara DUMNEAVOASTRĂ favoare, cu care m-ați onorat, strădaniile mele sunt răsplătite mai mult decât mi-aș fi dorit vreodată.

PREALUMINATE PRINŢ
Cel mai consecvent slujitor al Alteței Voastre
C.F. Gauss

Braunschweig, iulie 1801

Bibliografie

[1] Carl Friedrich Gauss, *Cercetări Aritmetice*, Traducere de C.I. Giurescu, Ed. Amarcord, Timișoara, 1999.

Revistă sponsorizată de

ROWEB Development SRL

și

OSF Global Services SRL